CHAOS

Anneleen Avau en Elien Hendrickx – studenten SLO wiskunde KU Leuven

Wat chaos is hoeven we je waarschijnlijk niet uit te leggen. Misschien is je kamer thuis wel een goed voorbeeld. Dan weet je ook wel dat chaos niet noodzakelijk wanorde betekent. Je moeder zal misschien van mening zijn dat je vaker moet opruimen, maar zelf kun je alles in je kamer terugvinden! Ook in wiskunde en wetenschappen wordt het begrip chaos gebruikt, namelijk bij het beschrijven van fenomenen die evolueren in de loop van de tijd. Chaos krijgt in deze context een heel specifieke betekenis: we zeggen dat een systeem chaotisch is als het **extreem gevoelig is voor variatie in de begintoestand**. Dat wil zeggen: een heel kleine verandering in het begin zorgt na verloop van tijd voor een heel grote verandering. Het gevolg is dat zo'n systeem (op lange termijn) onvoorspelbaar is. Het weer is bijvoorbeeld een chaotisch system. Chaos is echter geen complete wanorde (zoals de naam suggereert); het is wanorde in een dynamisch systeem, dat altijd voorspelbaar is op de korte termijn.

> ***Wat is een dynamisch systeem?*** *Voor een dynamisch systeem zijn twee dingen van belang: wat is de begintoestand en wat zijn de formules die, uitgaande van een gegeven toestand, de toekomstige toestand bepalen. Een dynamisch systeem is dus een manier om te beschrijven hoe een toestand zich ontwikkelt tot een andere toestand in de loop van de tijd.*

Deze begrippen lijken nu wellicht nog wat abstract, maar in deze bundel gaan we het begrip chaos onderzoeken aan de hand van twee Cinderella applets. Op het einde van de bundel moet je dus begrijpen wat een dynamisch systeem is en wat chaos is!

1. Conway's spel van het leven

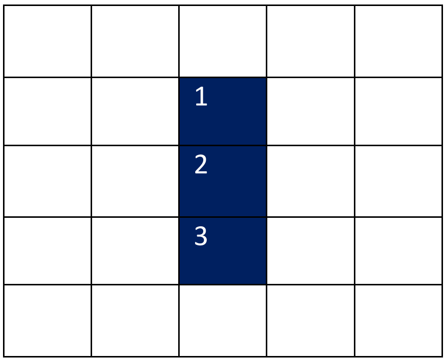
Game of Life, soms kortweg Life genoemd, is een in 1970 door de Britse wiskundige John Conway bedacht tweedimensionaal spel met vierkante 'cellen' die 'levend' of 'dood' kunnen zijn, en die zich volgens vastgestelde regels ontwikkelen. De tijd evolueert in stapjes en bij elke stap kunnen cellen levend worden of dood gaan. De regels van dit spel worden hieronder uitgelegd.

Regels

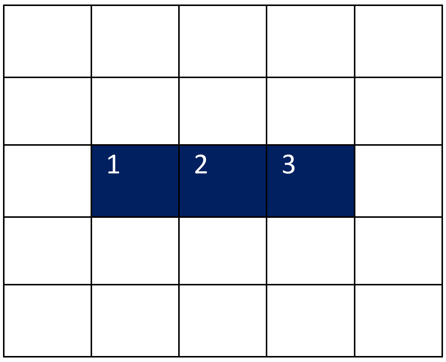
- Elke levende cel met minder dan twee levende buren (cellen die met een volledige zijde of met een hoekpunt aan de cel grenzen) sterft, als gevolg van onderbevolking.
- Elke levende cellen met twee of drie levende buren leeft verder in de volgende generatie.
- Elke levende cellen met meer dan drie levende buren sterft, als gevolg van overbevolking.
- Elke dode cel met exact drie levende buren wordt een levende cel in de volgende generatie door voortplanting.

Om de regels beter te begrijpen zullen we hieronder een concreet voorbeeld behandelen.

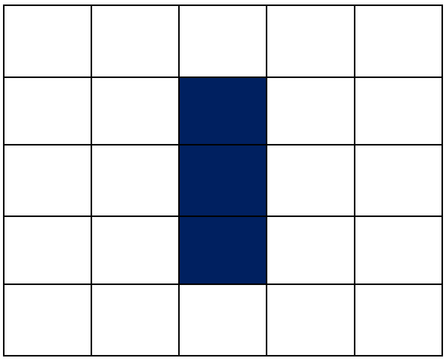
Balk



Het vakje met nr. 1 heeft één naaste buur. Dit houdt in dat het vakje in de volgende generatie zal sterven wegens onderbevolking. Hetzelfde geldt voor het vakje met nr. 3. Het vakje met nr. 2 heeft twee naaste buren en zal dus wel overleven in de volgende generatie. De cel links en rechts van het blauwe vakje zijn in de huidige generatie dood, maar hebben wel drie levende buren waardoor ze in de volgende generatie levend zullen zijn. De volgende generatie ziet er dan als volgt uit:



De vakjes met nr. 1 en 3 hebben nu slechts één buur en zullen in de volgende generatie dood gaan wegens onderbevolking. Het vakje met nr. 2 heeft opnieuw twee naaste buren en zal dus overleven. De cel boven en onder het blauwe vlakje zijn in de huidige generatie dood, maar hebben wel drie levende buren waardoor ze in de volgende generatie levend zullen zijn. De volgende generatie ziet er dan als volgt uit:



We merken op dat generatie drie overeenkomt met generatie één. Zou generatie vier overeen komen met generatie twee? Om dit te achterhalen openen we de Cinderella applet “Conway’s game of life”. Dit is de tweede applet onder “chaos”. In de startinstellingen zou 2 en 3 aangeduid moeten zijn bij “survive” en 3 bij “creation”. Laat deze startinstellingen zo staan of pas ze aan indien ze verkeerd staan. Maak eerst het veld leeg door op “clear” te klikken. Geef vervolgens het beginpatroon van de balk in door op drie cellen in dezelfde kolom te klikken. Schuif het balkje van de speed volledig naar rechts. Vervolgens mag je de simulatie starten door op “start” te klikken en observeren wat er gebeurt.

Indien alles correct werd uitgevoerd, zien we dat er een patroon ontstaat dat heen en weer gaat tussen twee standen. We zeggen dan dat dit patroon **periode** 2 heeft omdat er twee stappen nodig zijn om een volledige cyclus te doorlopen en terug in de beginpositie te belanden.

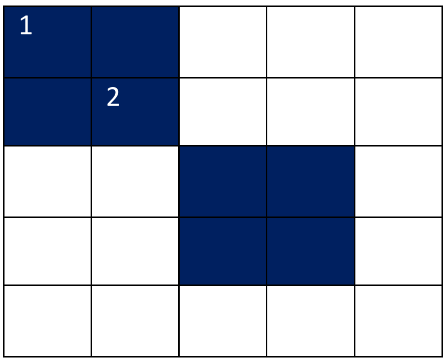
De kunst van het spel is beginpatronen te bedenken die aanleiding geven tot een bijzonder gedrag. Er zijn:

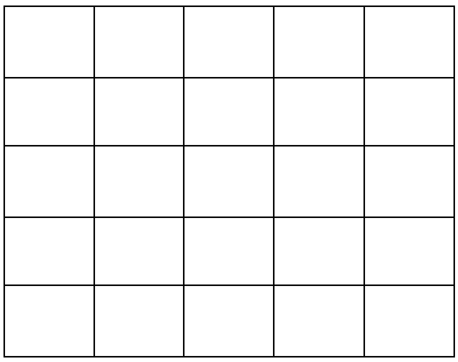
1. Stabiele/statische patronen
2. Patronen die heen en weer gaan tussen twee of meer standen (met een periode)
3. Patronen die op lange termijn verdwijnen of veranderen in een stabiel patroon
4. Patronen die zich verplaatsen
5. Patronen die oneindig groeien

<u>Vraag 1:</u> Hieronder zijn nog enkele startpatronen gegeven. Bepaal voor elk patroon de volgende 5 generaties en schrijf vervolgens het nummer van het soort patroon dat gevormd wordt eronder. Doe dit in eerste instantie manueel. Nadien controleer je de oplossing door het gebruik van de applet “Conway’s game of life”. Bij het voorbeeld van de baken worden er enkele hulpvragen gesteld om jullie goed op gang te brengen.

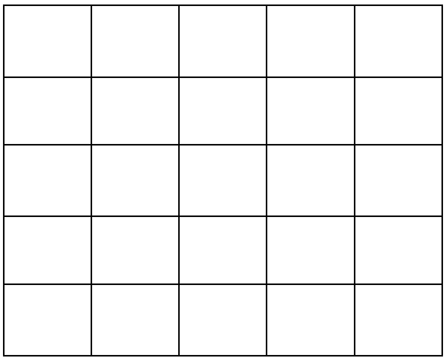
Opm: De grootte van het speelveld in onderstaande voorbeelden is 5 op 5, maar in werkelijkheid loopt het speelveld oneindig door.

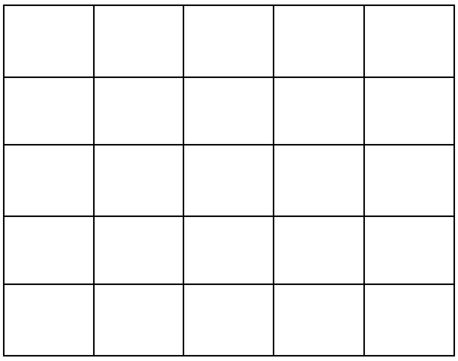
Baken

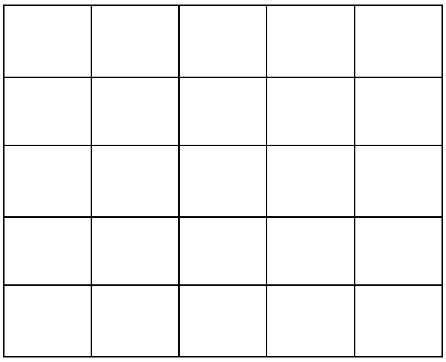


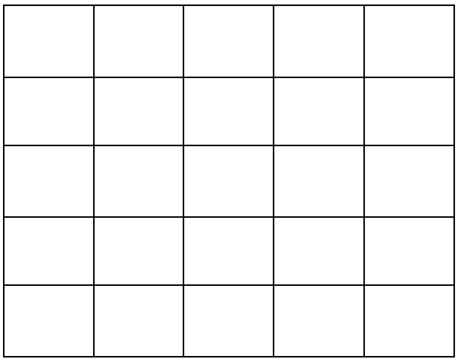


1. Zal de cel met nr. 1 in de volgende generatie overleven? Waarom?..
2. Zal de cel met nr. 2 in de volgende generatie overleven? Waarom?..
3. Zullen er in de volgende generatie nieuwe cellen levend worden die in de huidige generatie dood zijn?..



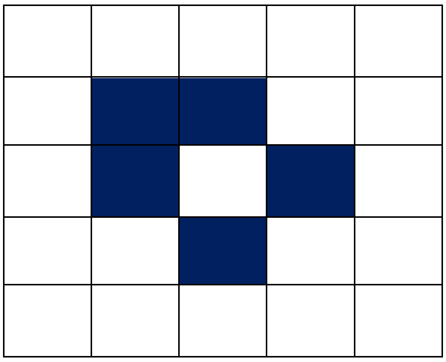


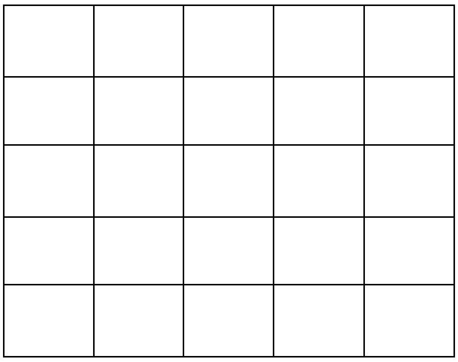


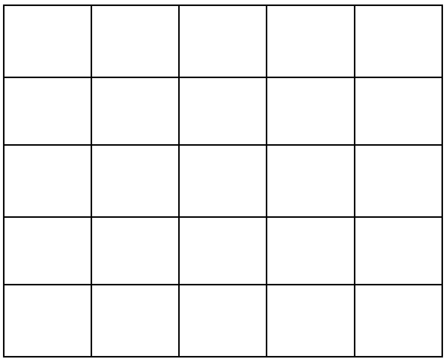


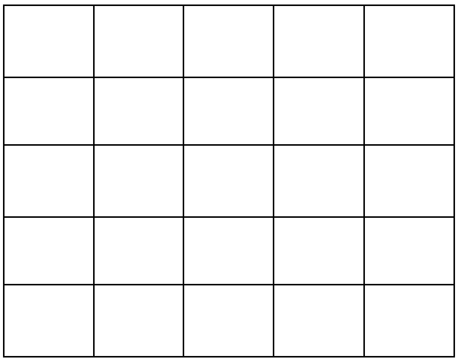
Soort patroon:………

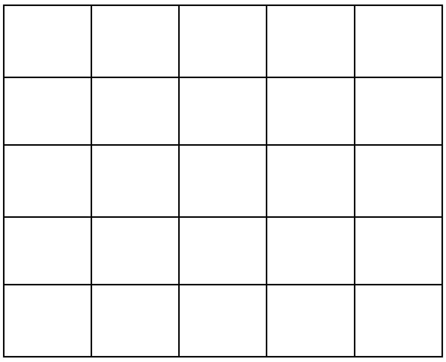
Boot

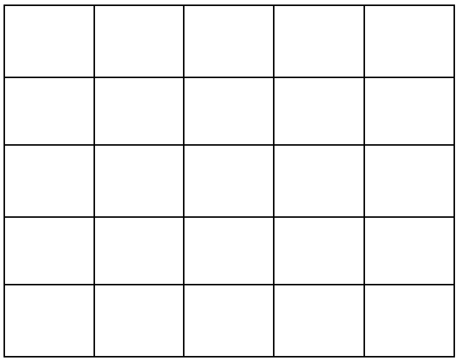








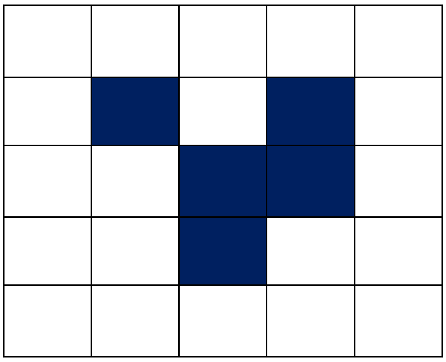




Soort patroon:……….

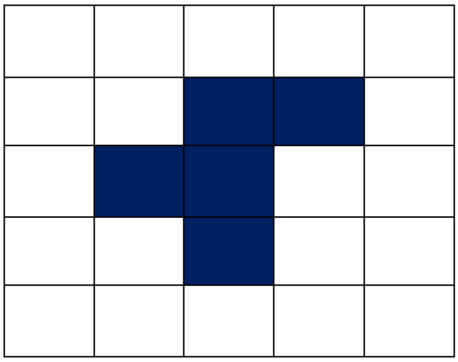
<u>Vraag 2:</u> Hieronder zijn nog 4 startpatronen gegeven. Gebruik hiervoor meteen de applet en bestudeer welk soort patroon er ontstaat na veel simulaties. Verhoog daarvoor de snelheid van het simuleren naar het maximum door het balkje bovenaan de applet naar links te verschuiven. Je mag het speelveld oneindig groot veronderstellen.

Zweefvliegtuig



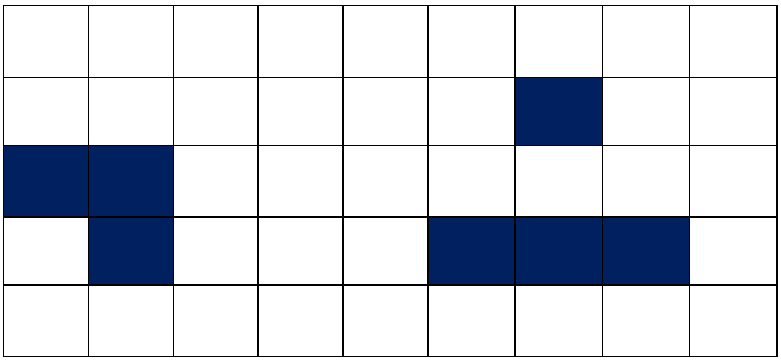
Soort patroon:…………………………………………

R-pentomino



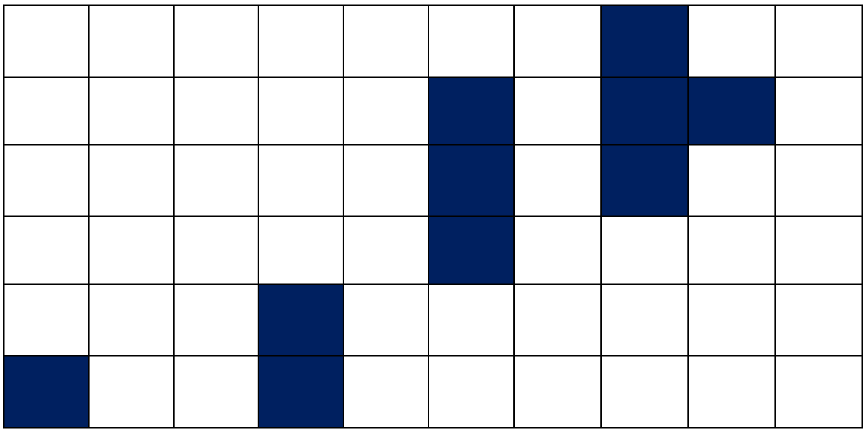
Soort patroon:…………………………………………

Diehard



Soort patroon:…………………………………………

Eternity



Soort patroon:………………………………………

<u>Vraag 3:</u> Probeer nu zelf om nog enkele nieuwe patronen te zoeken die een bijzonder gedrag vertonen.

Het spel van het leven: voorbeeld van een chaotisch dynamisch systeem

<u>Wat heeft dit spel te maken met een dynamisch systeem en met het begrip chaos?</u>

Een toestand in Game of Life wordt beschreven door van elke cel aan te geven of ze dood of levend is. De toestand evolueert in de tijd. Hoe de toestand na verloop van een zekere tijd is, wordt bepaald door twee zaken:

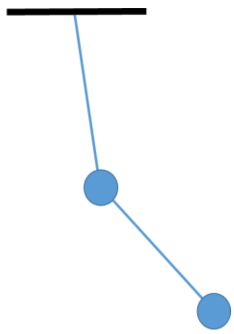
- Ten eerste is de begin**toestand** van belang.
- Verder zijn de regels over sterven/geboren worden van belang. Zij bepalen immers hoe je van een toestand overgaat naar de toestand op het volgende tijdstip.

Als je de begintoestand kent kun je (in principe) berekenen wat de toestand is op elk later tijdstip. Het dynamisch systeem is dus **voorspelbaar of deterministisch.** De **chaos** in dit spel houdt in dat begintoestanden die slechts weinig van elkaar verschillen, toch aanleiding kunnen geven tot een heel verschillende evolutie. Zo geeft bijvoorbeeld het aantal vakjes waaruit een balk samen gesteld is een zeer verschillende evolutie. Test dit uit via de applet!

<u>Waarom wordt dit spel ‘the game of life’ genoemd?</u>
Game of Life werd in 1970 door de Britse wiskundige John Conway (geboren 1937) bedacht. Het was een cellulaire automaat met vierkante 'cellen' die 'levend' of 'dood' kunnen zijn. Het spel is heel populair omdat het verrassend is hoe een bepaald patroon kan evolueren door middel van eenvoudige regels. Het is daarom een prachtig voorbeeld van evolutie en zelforganisatie. Deze zelforganisatie is een centraal kenmerk van de levende natuur: organisatie en structuur kunnen ontstaan in de afwezigheid van een ‘designer’, enkel en alleen door de eenvoudige regels toe te passen. Het spel toont vergelijkingen met de groei, vermindering of verandering van een populatie levende organismen. Het opent dan ook vele mogelijkheden voor verder onderzoek. Zo kunnen de complexe patronen dienst doen op verschillende gebieden, zoals informatica, natuurkunde, biologie, biochemie, economie, wiskunde, filosofie, ...

2. De dubbele slinger

Vroeger werden veel processen als onvoorspelbaar en willekeurig beschouwd: het druppelen van een kraan, het weer, het ontstaan van wolken, wervelingen in vloeistofstromen. Sinds de komst van de computer kunnen we dergelijke processen beter bestuderen. Als tweede voorbeeld van een chaotisch proces bekijken we in dit deel de beweging van de dubbele slinger. Dit is een slinger waar aan de onderkant een tweede slinger is gehangen, zoals in de figuur.

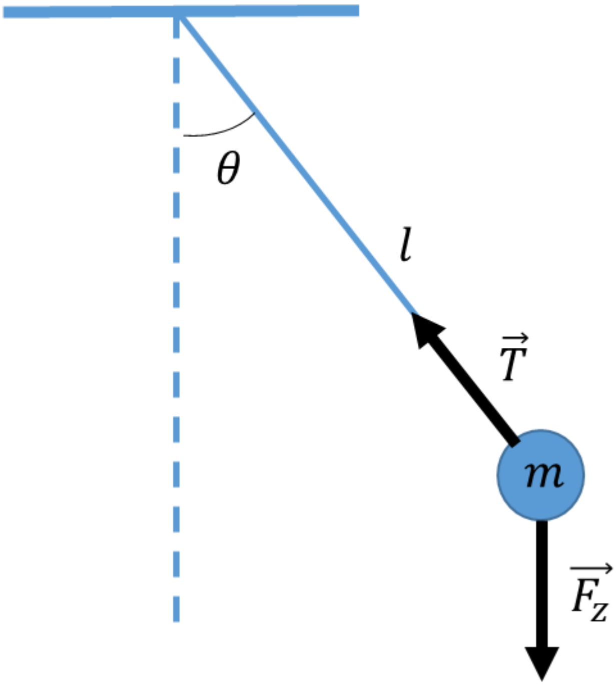


Enkelvoudige slingers: geschiedenis en slingerwetten

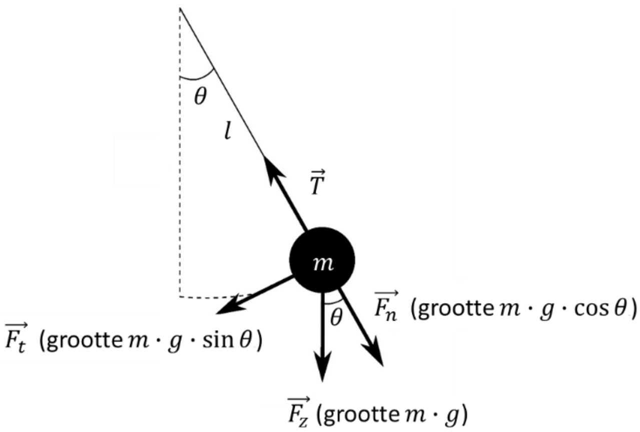
Iedereen weet hoe een enkele slinger zich gedraagt: heel voorspelbaar. Denk aan de slinger van een hangklok, deze gaat zeer regelmatig heen en weer, heen en weer… Toch zijn slingers merkwaardige voorwerpen: het is vreemd om zien dat een massa van 10 gram en een massa van 1 kg, opgehangen aan even lange draden, er precies even lang over doen om één slingerbeweging uit te voeren! Ook is het heel vreemd dat bij kleine uitwijkingen de tijd om één slingerbeweging uit te voeren onafhankelijk is van de grootte van de maximale uitwijking. Naar het schijnt was het Galilei (1564-1642) die als eerste deze merkwaardige feiten constateerde. In de Dom van Pisa hing (en hangt nog steeds) een mooie luchter. Toen Galilei de mis bijwoonde in de Dom, kwam door een open raam een zachte bries. Nu eens schommelde de luchter heel heftig, dan heel zwakjes. Gefascineerd bleef Galilei het gedrag van de luchter volgen en constateerde dat de tijd om 1 schommeling te maken niet afhing van de slingerafstand. Aangezien hij nog geen horloge had, bepaalde de pientere jongeman deze tijd door middel van zijn polsslag.

Galileo Galilei en de wet van het pendulum (= synoniem voor dubbele slinger)

Het wiskundig model voor een slinger bestaat uit een massa *m* vastgemaakt aan een draad met lengte *l* waarvan de massa verwaarloosbaar is. Wordt deze massa uit haar evenwichtsstand gebracht en losgelaten, dan voert deze een heen- en weergaande beweging uit omheen haar evenwichtsstand onder invloed van de zwaartekracht ($\overrightarrow{F_z} = m \cdot \vec{g}$) en de trekkracht van het touw ($\vec{T}$). De krachten die inwerken op een enkelvoudige slinger zijn hieronder weergegeven.



Achtergrondinformatie: krachten en bewegingsvergelijking van de enkelvoudige slinger



De kracht $\overrightarrow{F_z}$ kan in 2 componenten ontbonden worden:

- de normaalcomponent $\overrightarrow{F_n}$ met grootte $m \cdot g \cdot \cos(\theta)$ volgens de richting van het touw;
- de tangentiële component $\overrightarrow{F_t}$ met grootte $m \cdot g \cdot \sin(\theta)$ rakend aan de cirkel.

De zwaartekracht is de veroorzaker van de beweging die ontstaat als de slinger in een niet verticale positie wordt losgelaten. Na het loslaten zit de slinger vast in een beweging over een cirkel met straal *l*. In de uiterste standen is de snelheid van de slinger nul. De tangentiële component van de zwaartekracht zal proberen de massa naar haar evenwichtsstand (dat wil zeggen: $\theta = 0$) terug te drijven. Tijdens de beweging naar de evenwichtsstand wordt deze tangentiële component van de zwaartekracht kleiner, om nul te worden in de evenwichtsstand. Bij de beweging naar de evenwichtsstand neemt de snelheid toe. Door de traagheid gaat de massa haar evenwichtsstand voorbij. Opnieuw zal de tangentiële component van de zwaartekracht (die nu van zin veranderd is) de massa afremmen, waardoor de grootte van de snelheid van de massa opnieuw afneemt om nul te worden in de uiterste stand, waar de massa tot rust komt. Onder invloed van de tangentiële component van de zwaartekracht wordt de massa dan met toenemende snelheid opnieuw naar de evenwichtsstand teruggedreven, waar de snelheid opnieuw maximaal wordt en de tangentiële component van de zwaartekracht opnieuw van zin verandert enz…

Je kunt de beweging van de slinger beschrijven via de functie die θ in termen van t geeft. Op basis van de wet van Newton kan men voor deze voorlopig onbekende functie een vergelijking opstellen:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l} \cdot sin\theta.$$

Het gaat hierbij over een differentiaalvergelijking: een vergelijking met een functie (hier: $\theta(t)$) als onbekende en die een verband geeft tussen deze onbekende functie en haar afgeleiden (hier: de tweede afgeleide). Je kunt de functie $\theta(t)$ (in principe) vinden door deze differentiaalvergelijking op te lossen.

De slingertijd is de tijdsduur die verloopt tussen twee momenten waarop een punt (bijvoorbeeld de massa) van een slinger zich weer op hetzelfde uiteinde bevindt. De slingertijd wordt ook wel periode genoemd. Christiaan Huygens (1629-1695) stelde al een formule op voor de slingertijd T van een verticale slinger:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zoals je in de formule kunt zien, hangt de slingertijd alleen af van de lengte van de slinger en dus niet van de grootte van de beginuitwijking. In werkelijkheid is dat alleen het geval als de uitwijking van de slinger niet al te groot is.

Het aantal keer dat een slinger heen en weer gaat per tijdseenheid noemen we de frequentie. De relatie tussen periode en frequentie is als volgt:

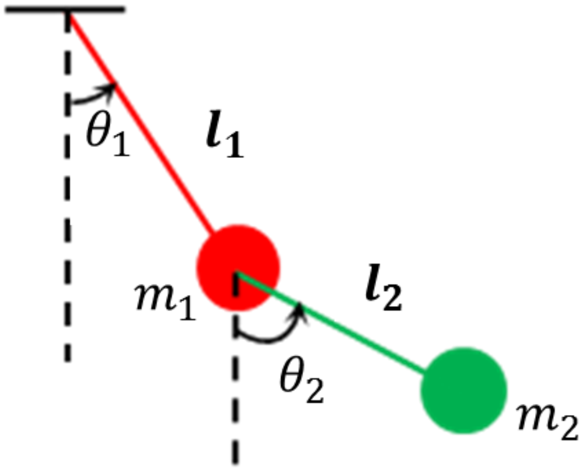
$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$$

Opdracht: Als men de slingerlengte van een slinger 4 keer groter maakt, dan wordt de frequentie:

A. 4 keer groter
B. 4 keer kleiner
C. 2 keer groter
D. 2 keer kleiner

Het verschil tussen de enkele slinger en de dubbele slinger: chaos

Duid nu de krachten aan op onderstaande figuur die inwerken op de massa's van de dubbele slinger.



Hierboven zagen we dat een enkele slinger een duidelijke baan heeft, die je makkelijk kan voorspellen. Geef je daarentegen de dubbele slinger een flinke uitslag, dan beweegt hij wild. De tweede arm van de slinger lijkt op een eigenzinnige manier rond te dansen: het ene moment voert hij gracieuze pirouettes uit, het andere moment een wilde volksdans. Test dit door middel van de 2 slingers die beschikbaar zijn op de tentoonstelling!

Om de wilde bewegingen van een dubbele slinger verder te demonstreren, open je de Cinderella applet 'dubbele pendulum' (dit is de derde applet onder "chaos") en kies je een bepaalde beginpositie. Links zie je een pijl die de zwaartekracht voorstelt. (Deze kan je in de applet ook van sterkte en richting wijzigen, maar blijft bij een reële slinger natuurlijk altijd verticaal en met dezelfde sterkte.) Zet ook 'trace' aan zodat je de baan van de slinger beter kan volgen. Je mag deze baan hieronder tekenen.

Startpositie en patroon:

Je merkt dat de baan die de dubbele slinger volgt, helemaal anders is dan deze van de enkele slinger! We gaan de eigenschappen van een dubbele slinger onderzoeken aan de hand van de applet. Neem eerst een startpositie en voer het experiment twee keer uit (door tweemaal op start te klikken) zonder de startpositie te veranderen. Teken in beide gevallen het patroon hieronder. Doe dit zo nauwkeurig mogelijk.

Startpositie en patroon 1^{e} keer

Startpositie en patroon 2^{e} keer

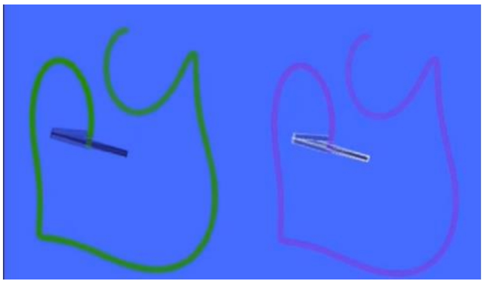
We zullen de slinger nu opnieuw twee keer laten slingeren. Kies nu echter de tweede keer een beginpositie die heel licht verschilt van die van de eerste keer.

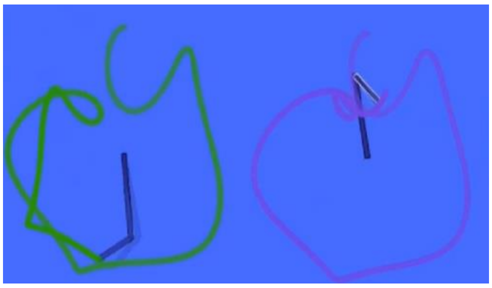
Startpositie en patroon 1^{e} keer

Startpositie en patroon 2^{e} keer

Je ziet dat het 2e patroon helemaal anders is als de startpositie lichtjes verandert! Dit is natuurlijk waar het bij een chaotisch systeem om draait.
Om nog beter het effect van de startpositie te begrijpen, kan je onderstaand youtube-filmpje bekijken. Hierin worden 2 pendulums naast elkaar losgelaten, eerst met dezelfde beginpositie en vervolgens met een klein verschil in beginpositie.

https://www.youtube.com/watch?v=n15rk0MAZnQ


Zelfde beginpositie


Heel klein verschil in beginpositie

De dubbele slinger: voorbeeld van een chaotisch dynamisch systeem

Net zoals bij Conway's spel van het leven is de dubbele slinger ook een voorbeeld van een chaotisch dynamische systeem. Zowel de enkele als dubbele slinger zijn voorbeelden van een **dynamisch** systeem. Bij de enkele slinger wordt de toestand beschreven door de hoek θ en de snelheid waarmee deze hoek verandert. Bij de dubbele slinger gaat het over twee hoeken en twee snelheden.

- De **begintoestand** is de startpositie en startsnelheid (in ons geval is deze 0) van de arm (enkele slinger) of beide armen (dubbele slinger).
- Voor de enkele slinger hebben we de differentiaalvergelijking gezien. Deze differentiaalvergelijking bepaalt hoe de slinger verder evolueert. Ook voor de dubbele slinger kan er een differentiaalvergelijking opgesteld worden, al is deze veel ingewikkelder.
- Zowel bij de enkele als bij de dubbele slinger geldt: als je twee keer vanuit precies dezelfde begintoestand vertrekt, dan zorgt de differentiaalvergelijking ervoor dat de beweging precies op dezelfde manier verloopt. Beide dynamische systemen zijn dus **deterministisch**.
- Een belangrijk verschil is dat de enkele slinger niet chaotisch is, maar de dubbele slinger wel. De **chaos** wordt weerspiegeld in het feit dat de kleinste verandering in startpositie bij de dubbele slinger al na korte tijd tot enorme verschillen leidt. Dit maakt het gedrag op lange termijn onvoorspelbaar: als je de slinger loslaat, kun je met geen mogelijkheid voorspellen waar deze zich na 15 seconden bevindt.

In praktijk is het erg moeilijk om een reële slinger twee keer dezelfde startpositie (en startsnelheid) te geven. Dit lukt niet helemaal, waardoor al na een paar slingerbewegingen een compleet ander patroon ontstaat. Zelfs met de nauwkeurigste apparatuur krijg je nooit *exact* dezelfde startpositie en startsnelheid; er treden altijd meetfouten en miniem kleine trillingen op en een positieverschil van 10^{-12} millimeter kan al na enige tijd tot een totaal verschillende slingerbeweging leiden. Kortom: "kleine oorzaken, grote gevolgen".

3. Conclusie

Chaos is zeker niet (zoals de naam suggereert) complete wanorde; het is wanorde in een deterministisch dynamisch systeem, dat altijd voorspelbaar is op korte termijn. Bovendien leert nadere bestudering vaak dat er binnen een chaotisch systeem wel degelijk van een zekere orde en regelmaat sprake is. Veel processen in onze wereld zijn chaotisch, de regelmaat van de enkele slinger is een uitzondering. In de echte wereld regeert de chaos! Dit kan je dus zeggen als je moeder volgende keer vraagt om je kamer op te ruimen…