Imaginary - van bol naar kubus

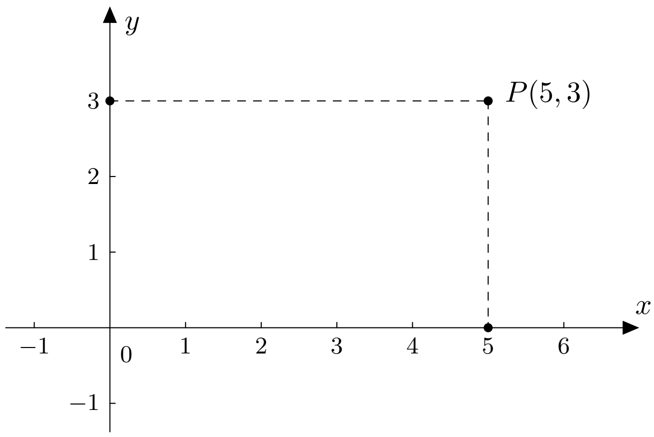
Gommaar Maes en Tania Van Damme
SLO Wiskunde - Universiteit Gent en Atheneum Mariakerke

1 Inleiding: coördinaat en vergelijking

1.1 Vlak

Coördinaat

Als we werken binnen een orthonormaal assenstelsel, dan heeft elk punt in het rooster precies één coördinaat bestaande uit twee coördinaatgetallen: een x-coördinaatgetal en een y-coördinaatgetal. In het voorbeeld heeft het punt P als coördinaat $(5, 3)$.



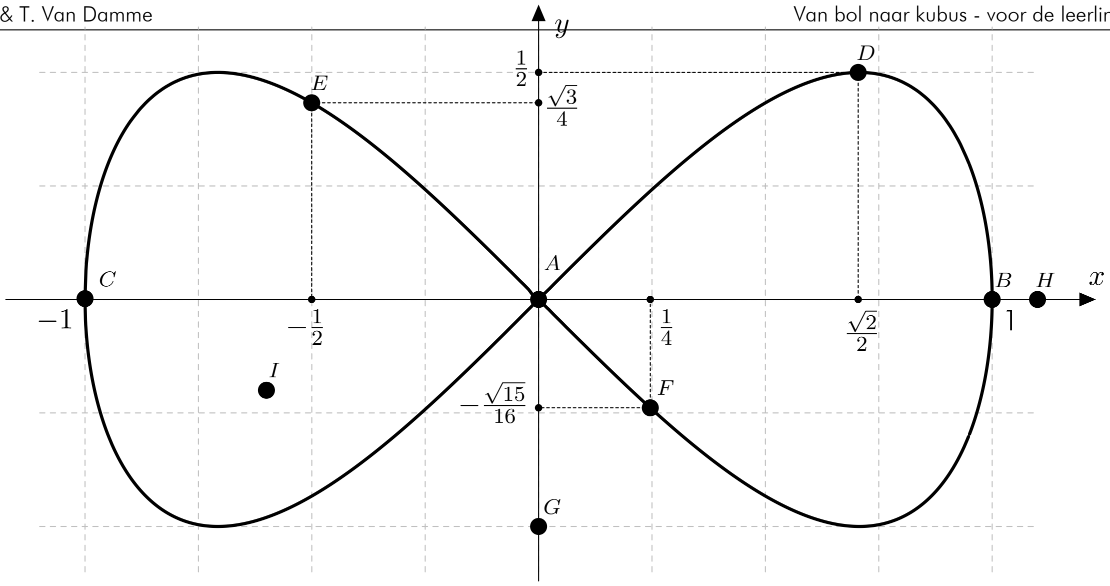
Vergelijking van een kromme

Een vergelijking van een kromme is een nodige en voldoende voorwaarde (op de coördinaat van een punt) opdat een punt op die kromme zou liggen. Een kromme in het vlak heeft een vergelijking in twee onbekenden.

Kortom:

- Als de coördinaat van een punt aan de vergelijking voldoet, dan zal het punt op die kromme liggen.
- Als de coördinaat van een punt niet aan de vergelijking voldoet, dan zal het punt niet op die kromme liggen.

Als voorbeeld bekijken we een lemniscaat.



Deze lemniscaat heeft als vergelijking:

$$y^2 = x^2 - x^4$$

De vergelijking kan herleid worden op nul en wordt dan

$$x^2 - x^4 - y^2 = 0$$

Aangezien de veelterm in het linkerlid van de herleide vergelijking van de 4de graad is, zeggen we dat de lemniscaat een kromme van de 4de graad is.

Een punt met een bepaalde coördinaat ligt op de kromme, als de coördinaat aan de vergelijking voldoet, als ze m.a.w. een oplossing is van de vergelijking.

Volgende punten liggen op de lemniscaat

$$\begin{array}{lll}
A(0,0) & \text{want} & 0^2 = 0^2 - 0^4 \\
B(1,0) & \text{want} & 0^2 = 1^2 - 1^4 \\
C(-1,0) & \text{want} & 0^2 = (-1)^2 - (-1)^4 \\
D(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) & \text{want} & (\frac{1}{2})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^4 \\
E(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}) & \text{want} & (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 = (-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2})^4 \\
F(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{16}) & \text{want} & (-\frac{\sqrt{15}}{16})^2 = (\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^4
\end{array}$$

Volgende punten liggen niet op de lemniscaat:

$$\begin{array}{lll}
G(0, -\frac{1}{2}) & \text{want} & (-\frac{1}{2})^2 \neq 0^2 - 0^4 \\
H(1.2, 0) & \text{want} & 0^2 \neq 1.2^2 - 1.2^4 \\
I(-0.6, -0.2) & \text{want} & (-0.2)^2 \neq (-0.6)^2 - (-0.6)^4
\end{array}$$

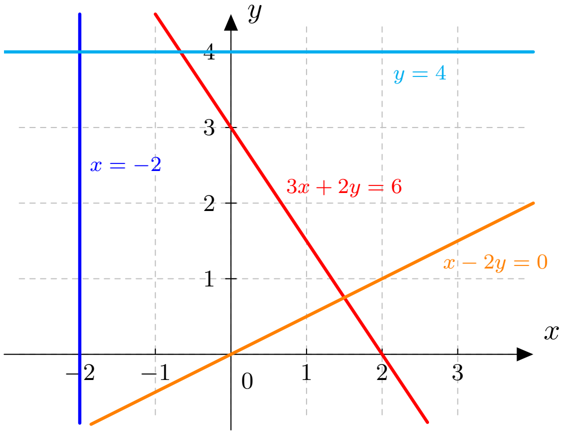
Rechten

Elke rechte heeft als vergelijking een eerstegraadsvergelijking van de algemene vorm:

$$ax + by + c = 0$$

Bijzondere gevallen:

rechte $\parallel$ y-as	heeft als vergelijking	$x = k$ met k een constante
rechte $\parallel$ x-as	heeft als vergelijking	$y = l$ met l een constante
rechte door $O(0, 0)$	heeft als vergelijking	$ax + by = 0$ (geen constante term)



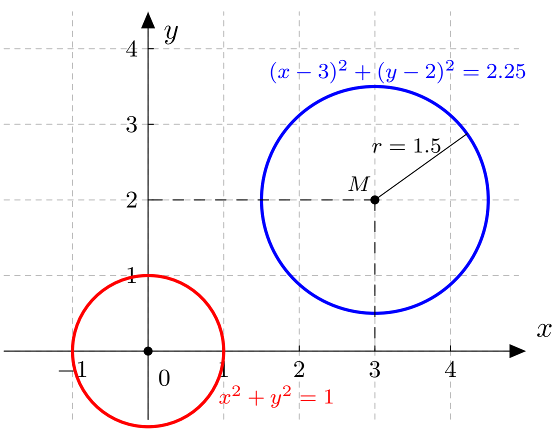
Cirkels

Vergelijkingen van cirkels zijn tweedegraadsvergelijkingen die steeds in de vorm

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

kunnen geschreven worden. Hierbij is het punt M met coördinaat (x_0, y_0) het middelpunt van de cirkel en r de straal van de cirkel. Een cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1 heeft dus als vergelijking:

$$x^2 + y^2 = 1$$



Gemeenschappelijke punten van krommen

Als we de gemeenschappelijke punten van twee krommen opsporen, zoeken we punten waarvan de coördinaten voldoen aan beide vergelijkingen, waarvan de coördinaten oplossingen zijn van beide vergelijkingen. We moeten m.a.w. een stelsel oplossen bestaande uit de vergelijkingen van beide krommen.

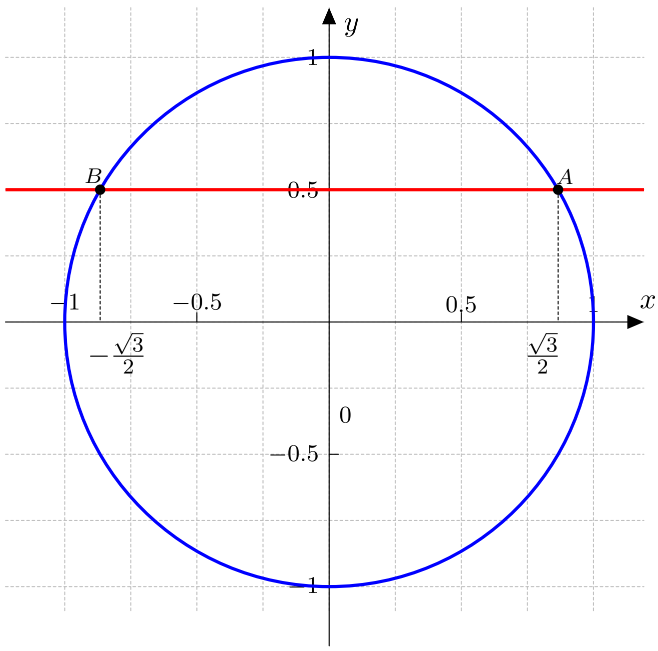
Voorbeeld:
We zoeken de gemeenschappelijke punten van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ en de rechte met vergelijking $y = \frac{1}{2}$. We lossen het volgende stelsel op:

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dit stelsel heeft als oplossingen

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

De cirkel en de rechte hebben twee snijpunten A en B met coördinaten $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ en $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

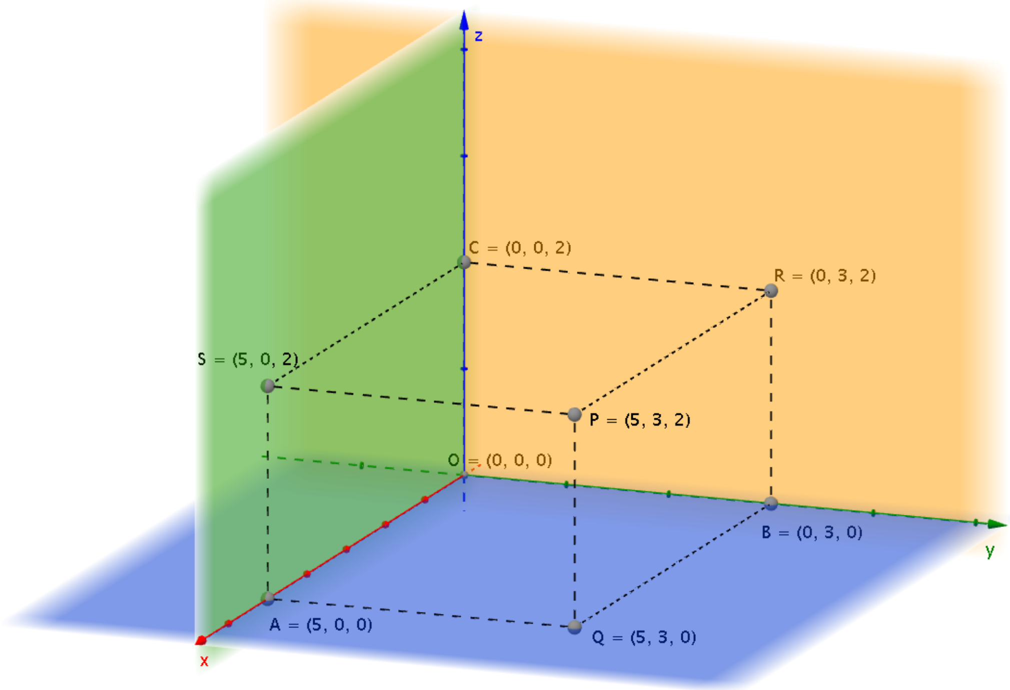


1.2 Ruimte

Coördinaat

Als we werken in een orthonormaal assenstelsel, dan heeft elk punt in dit rooster precies één coördinaat bestaande uit **drie** coördinaatgetallen namelijk een x-coördinaatgetal, een y-coördinaatgetal en een een z-coördinaatgetal. De ruimte is immers 3-dimensionaal (in tegenstelling tot het vlak dat 2-dimensionaal is).

In het voorbeeld heeft het punt P als coördinaat $(5, 3, 2)$.



Vergelijking van een oppervlak

Elk oppervlak in de ruimte heeft een vergelijking in 3 onbekenden. Een oplossing van deze vergelijking is een geordende drietal. Zulk drietal is de coördinaat van een punt op het oppervlak. In de tentoonstelling zie je een aantal van deze oppervlakken met bijbehorende vergelijkingen.

Vergelijking van een vlak

Elk vlak in de ruimte heeft een vergelijking van de eerste graad in 3 onbekenden.

$$ax + by + xz - d = 0$$

We zeggen dat een vlak een eerstegraadsoppervlak is.

Bijzondere gevallen:

xy-vlak	heeft als vergelijking	$z = 0$
vlak $\parallel$ xy-vlak	heeft als vergelijking	$z = k$ met k een constante
yz-vlak	heeft als vergelijking	$x = 0$
vlak $\parallel$ yz-vlak	heeft als vergelijking	$x = l$ met l een constante
xz-vlak	heeft als vergelijking	$y = 0$
vlak $\parallel$ xz-vlak	heeft als vergelijking	$y = m$ met m een constante
vlak door O	heeft als vergelijking	$ax + by + cz = 0$ (geen constante term)

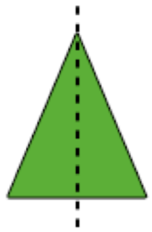
2 Spiegelsymmetrie

Een vlakke figuur is (spiegel)symmetrisch t.o.v. een rechte als het beeld door een spiegeling om deze rechte samenvalt met de oorspronkelijke figuur.
Plastischer uitgedrukt: als je de figuur samenplooit met als plooi de symmetrieas, dan vallen de twee helften van de figuur precies samen.

Een ruimtefiguur is (spiegel)symmetrisch t.o.v. een vlak als het beeld door een spiegeling om dit vlak samenvalt met de oorspronkelijke figuur.
Plastischer uitgedrukt: als je de figuur in twee snijdt langs het symmetrievlak en dat vlak vervangt door een spiegel, dan zie je de volledige figuur terug.

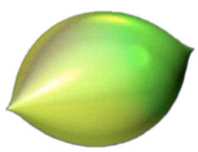
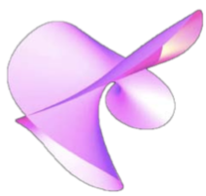
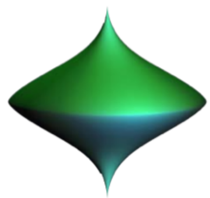
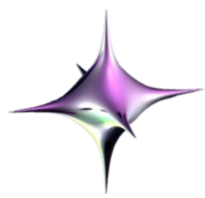
Opdracht 1

Omcirkel de vlakke figuren die symmetrisch zijn t.o.v. de getekende rechte.




Opdracht 2

Omcirkel de ruimtefiguren die spiegelsymmetrisch zijn.

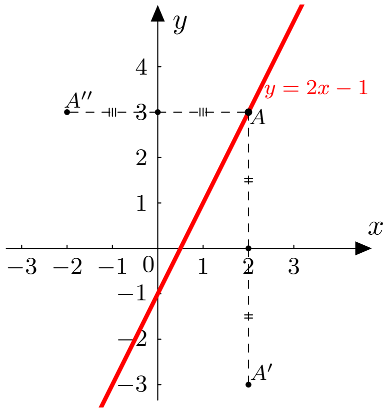





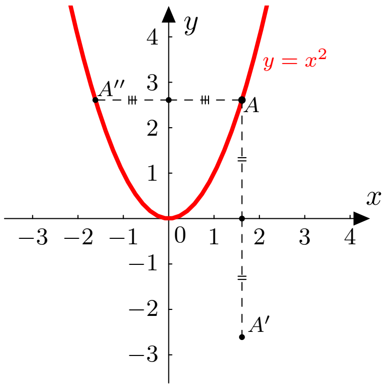
Het ontdekken van symmetrieën is meestal vrij eenvoudig, als we de figuren kunnen zien of aanraken, maar we kunnen ons wel de volgende vraag stellen.

Hoe kan je spiegelsymmetrieën (waarbij de spiegelvlakken coördinaatvlakken zijn) opsporen, als je van het oppervlak enkel de vergelijking kent, maar het oppervlak niet kan zien of aanraken?

We onderzoeken eerst hoe het zit met de spiegelsymmetrie t.o.v. de assen bij een vlakke figuur. We bekijken een aantal voorbeelden.

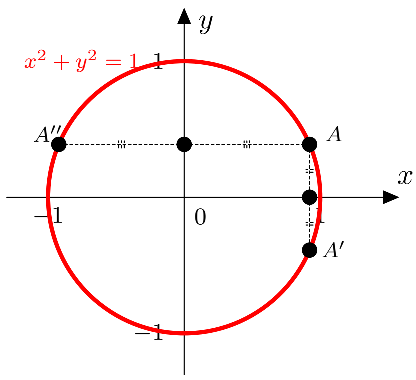
De rechte met vergelijking $y = 2x - 1$ is niet symmetrisch t.o.v. de x-as en ook niet t.o.v. y-as.





De parabool met vergelijking $y = x^2$ is symmetrisch t.o.v. de y-as, maar niet symmetrisch t.o.v. de x-as.

De eenheidscirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ heeft zowel de x- als de y-as als symmetrieas.



Opdracht 3

Bekijk aandachtig deze voorbeelden. Kruis dan in de tabel hieronder aan welke figuren de x-as en/of y-as als symmetrieas hebben. Nadien lees je de extra uitleg op de volgende bladzijde en controleer dan je antwoorden.

	x-as is symmetrieas	y-as is symmetrieas
$y^2 = x$		
$y = x^3$		
$x^2 - y^2 = 1$		
$y^3 = x^2$		
$x^2 - x^4 - y^2 = 0$		

We onderzoeken de voorwaarden voor spiegelsymmetrie gedetailleerder:

1. Een figuur heeft de x-as als symmetrieas, als voor elk punt A op de figuur ook zijn spiegelpunt A' op de figuur ligt. A en A' hebben hetzelfde x-coördinaatgetal, maar een tegengesteld y-coördinaatgetal (zie tekeningen vorige pagina).

   Als een figuur spiegelsymmetrisch is t.o.v. de x-as moet het teken van het y-coördinaatgetal als het ware 'geneutraliseerd' of 'opgeheven' worden. Even machten van y in een veelterm-vergelijking 'neutraliseren' dit teken.

   Komen in een vergelijking dus enkel even machten van y voor, dan zal de figuur zeker symmetrisch zijn t.o.v. de x-as[1].

2. Een figuur heeft de y-as als symmetrieas, als voor elk punt A op de figuur ook zijn spiegelpunt A'' op de figuur ligt. A en A'' hebben hetzelfde y-coördinaatgetal, maar een tegengesteld x-coördinaatgetal (zie tekeningen vorige pagina).

   Als een figuur spiegelsymmetrisch is t.o.v. de y-as moet het teken van het x-coördinaatgetal als het ware 'geneutraliseerd' of 'opgeheven' worden. Even machten van x in een veelterm-vergelijking 'neutraliseren' dit teken.

   Komen in een vergelijking dus enkel even machten van x voor, dan zal de figuur zeker symmetrisch zijn t.o.v. de y-as.

Bekijk nu opnieuw opdracht 3 en corrigeer waar nodig.

[1] Dit is enkel een voldoende voorwaarde, ze is niet noodzakelijk. Zo bevat de vergelijking $x^2y + y^3 - y = 0$ oneven machten van y, maar de vergelijking kan geschreven worden als $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$. Deze vergelijking valt uiteen in twee vergelijkingen $y = 0$ en $x^2 + y^2 = 1$. Dit zijn vergelijkingen van de eenheidscirkel en de x-as. Van deze figuren is de x-as weldegelijk een symmetrieas.

3 Vergelijking van een bol

Ga naar één van de schermen en selecteer het programma SURFER.
Je ziet een driedimensionaal oppervlak. Een vergelijking van dat oppervlak vind je onderaan in het invoerveld. Let wel: het beeldvenster toont slechts een deel van de ruimte, een deel rond de oorsprong $O(0, 0, 0)$. De weergave van de oppervlakken in het programma SURFER is daardoor een beetje ongewoon. SURFER toont de doorsnede van de vlakken met een bol rond de oorsprong, waardoor bijvoorbeeld vlakken er - door het perspectief - uitzien als ellipsen. Je kan een groter/kleiner deel zien door uit- of in te zoomen. Dat doe je met de schuifknop uiterst rechts of met de muis.
Linksonder boven de invoerbalk heb je de keuze tussen Start - Info - Kleuren. Kies hier 'Kleuren'.

Opdracht 4

- Voer nu een vergelijking in, waarvan je vermoedt dat het de vergelijking is van de eenheidsbol, de bol met straal 1 en middelpunt O. Bedenk hierbij dat een cirkel eigenlijk een tweedimensionale bol is.
  Schrijf jouw vergelijking hieronder neer:

- Kan je de vergelijking een beetje wijzigen zodat de straal van de bol groter wordt? Doe dit zonder in te zoomen. Zet daarna de straal terug op 1.

Opdracht 5

- Je hebt nu een vergelijking van de eenheidsbol ontdekt. Is deze bol spiegelsymmetrisch t.o.v. het xy-vlak? Hoe zie je dit aan de vergelijking? Denk daarbij aan het tweedimensionale geval.

  Zijn de twee andere coördinaatvlakken (het yz-vlak en het xz-vlak) eveneens spiegelvlakken? Verklaar je antwoord.

Opdracht 6

SURFER toont geen coördinaatassen. Aan de vorm kan je ook niet achterhalen waar de x-, de y- of de z-as ligt. Waaraan in de vergelijking merk je dit? Schrijf je vermoeden hieronder neer. In paragraaf 4 gaan we verder op zoek naar een antwoord op deze vraag.

4 Op zoek naar de assen

SURFER laat bij het tekenen van een oppervlak de assen dus niet zien. Een boloppervlak laat ons, wegens zijn algehele symmetrie, ook niet toe om de assen te ontdekken. In deze paragraaf moet je de vergelijking van de bol manipuleren om je vermoeden van daarstraks te testen.

Opdracht 7

We laten één van de vier termen weg in de vergelijking van de eenheidsbol.

- Welke term zullen we zeker laten staan, omdat we anders geen oppervlak meer krijgen?

- Als we deze term toch weglaten, wat is de oplossing van deze vergelijking en wat stelt deze voor (let wel: SURFER toont dit niet)?

Opdracht 8

We laten nu een andere term weg en voeren in:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

De coëfficiënt voor de term in z^2 is 0.

- In het vlak stelt dit een cirkel voor, maar van welk oppervlak in de ruimte is dit de vergelijking?

- Van welke as(sen) kan je nu aan de hand van het oppervlak de ligging op het scherm bepalen?

- Van welke as(sen) kan je dat niet?

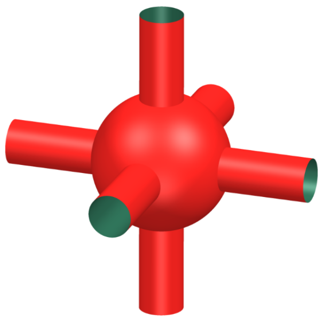
- Het valt op dat in de vergelijking x en y 'inwisselbaar' zijn, m.a.w. als we x en y verwisselen verandert de vergelijking niet. We zeggen dat de vergelijking symmetrisch is in x en y. De vergelijking is niet symmetrisch in x en z en ook niet symmetrisch in y en z. Kan je dat linken aan het antwoord op de vorige vraag?

Opdracht 9

Het oppervlak met als vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ is een (onbegrensde) cilinder met de z-as als symmetrieas.

- Wijzig een kleinigheid aan het voorschrift waardoor je de straal kleiner maakt.
- Geef de vergelijking van de cilinder met de x-as als symmetrieas en straal 1.
- Geef de vergelijking van de cilinder met de y-as als symmetrieas en straal 1.
- Bekijk nu in SURFER via het tabblad Start>Tutorial de figuur 'Coördinaten 1', waar je een assenstelsel ziet dat opgebouwd is uit drie cilinders met een kleine straal. Hoe het komt dat je de drie cilinders in één venster kan tonen, zie je aan de vergelijking en kan je lezen bij de figuur 'Tips voor experts 1'.

- Geef nu zelf een vergelijking in waardoor je de volgende figuur krijgt:



- Geef een vergelijking in zodat je het xz-vlak en het yz-vlak ziet. Vergelijk met 'Coördinaten 2'.
- Wijzig de vergelijking lichtjes zodat de drie coördinaatvlakken tevoorschijn komen.

5 Begrenzen van een oppervlak

Begrensd oppervlak

Een oppervlak is begrensd als we het kunnen inpakken in een balk, als we m.a.w. een balk vinden waar het oppervlak volledig in past.

Zo is een bol een begrensd oppervlak. Een cilinder (zoals in de vorige paragraaf) is een onbegrensd oppervlak.
Als een oppervlak begrensd is, kunnen we trouwens steeds een balk vinden waarbij de zijvlakken evenwijdig zijn met de drie coördinaatvlakken.

Hoe kan je het begrensd zijn van een oppervlak opsporen, als je van het oppervlak enkel de vergelijking kent, maar het oppervlak niet kan zien of aanraken?

Als een oppervlak uit verschillende stukken bestaat, is dat niet zo eenvoudig, daarom beperken we ons in deze paragraaf tot oppervlakken, die maar uit één stuk bestaan. We noemen zulke oppervlakken samenhangende oppervlakken.

Werkwijze

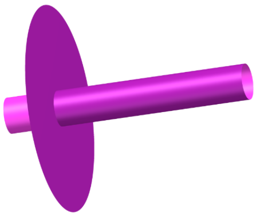
- We onderzoeken of het oppervlak begrensd is in de richting van de x-as.
- Dat doen we door een willekeurig vlak te nemen evenwijdig met het yz-vlak en de gemeenschappelijke punten van dat vlak en het oppervlak te bepalen. We lossen het stelsel van de beide vergelijkingen op.
- Als er geen gemeenschappelijke punten zijn, dan vormt het vlak een zijvlak van de begrenzende balk.
- We doen hetzelfde onderzoek naar begrensdheid in de richtingen van de y-as en de z-as.

Voorbeeld 1: de cilinder

Eerst proberen we de cilinder met vergelijking $x^2 + y^2 - 1 = 0$ te begrenzen door een vlak dat evenwijdig is met het yz-vlak. Zulk vlak heeft een vergelijking van de vorm: $x = a$. Hierbij is a een willekeurig getal. We moeten dan het stelsel oplossen:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Voor sommige waarden van a heeft dit stelsel oplossingen (bv. $a = \frac{1}{2}$), maar voor andere waarden van a bv. $a = 2$ zijn er geen oplossingen. Dit betekent dat het oppervlak begrensd is in de richting van de x-as. Analoog zien we dat de cilinder eveneens begrensd is in de richting van de y-as. Onderzoeken we echter de doorsnede van de cilinder en een willekeurig vlak evenwijdig met het xy-vlak met vergelijking $z = c$ dan zijn er steeds gemeenschappelijke punten te vinden (bv. het punt met coördinaat $(1, 0, c)$). Dit betekent dat we de cilinder dus niet kunnen begrenzen in de richting van de z-as, bijgevolg is de cilinder een onbegrensd oppervlak.



Voorbeeld 2: de bol

We weten dat we de eenheidsbol kunnen begrenzen in alle richtingen. Voor vlakken die evenwijdig zijn met het yz-vlak, moeten we dan het stelsel oplossen:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Voor sommige waarden van a zijn er oplossingen, voor andere waarden dan weer niet.

Opdracht 10

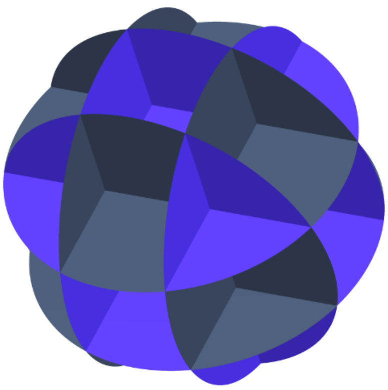
- Bepaal de grootste positieve waarde van a waarvoor er nog oplossingen zijn.
- Hoeveel oplossingen zijn er voor die waarde?
- Welke oplossing(en) is/zijn dit?

We kunnen analoog redeneren voor de andere richtingen. Zo slagen we er in om een bol in te pakken in een balk, in dit geval een kubus met ribbe 2.

Opdracht 11

Geef de vergelijkingen van de bol en zijvlakken van de nauwst omsloten kubus in, zodat je onderstaande figuur krijgt van de ingepakte bol.

Vlakken evenwijdig met het yz-vlak:	$x =$	en	$x =$
Vlakken evenwijdig met het xz-vlak:	$y =$	en	$y =$
Vlakken evenwijdig met het xy-vlak:	$z =$	en	$z =$



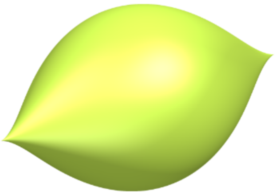
De bol is niet langer zichtbaar, maar je kan die zichtbaar maken, door in te zoomen en zo binnen te breken in de kubus.

6 Onderzoek van oppervlakken: de postertentoonstelling

In deze paragraaf onderzoeken we de symmetrie en de begrensdheid van een aantal oppervlakken.

Opdracht 12: Citrus

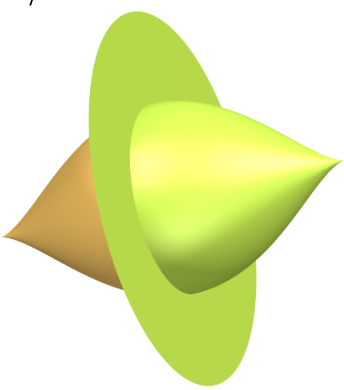
Ga voor de poster van het oppervlak met de naam 'Citrus' staan.



- Wat is de vergelijking van dit oppervlak?
- Van welke as kan je de ligging bepalen?
- Van welke assen niet? Hoe zie je dat aan de vergelijking?
- Welke coördinaatvlakken zijn symmetrievlakken van deze figuur?
- Geef de coördinaten van de twee scherpe punten.
- Dit oppervlak is duidelijk begrensd. Geef vergelijkingen van de zijvlakken van de balk die het oppervlak het nauwst omsluiten.

  Vlakken || met het xz-vlak: $y =$ en $y =$

  De andere grensvlakken zullen de Citrus raken in punten die op de cirkel - de doorsnede van een symmetrievlak en de Citrus - liggen. Zie figuur.



Vlakken || met het yz-vlak: $x =$ en $x =$

Vlakken || met het xy-vlak: $z =$ en $z =$

Opdracht 13: Dingdong

Zoek de poster van het oppervlak met de naam ‘Dingdong’.

- Wat is de vergelijking van dit oppervlak?
- Van welke as kan je de ligging bepalen?
- Van welke assen niet? Hoe zie je dat aan de vergelijking?
- Welke coördinaatvlakken zijn symmetrievlakken van deze figuur?
- Is dit oppervlak begrensd? Zo nee, zijn er richtingen waarin het begrensd is? Kan je de vergelijking van een grensvlak geven?

Opdracht 14

We gaan nu omgekeerd te werk. Beschouw een oppervlak met als vergelijking:

$$x^2 + y^2 = z^3(1 - z)$$

Beantwoord aan de hand van deze vergelijking de volgende vragen over dit oppervlak:

- Welke coördinaatvlakken zijn symmetrievlakken van dit oppervlak?
- Hoeveel assen zullen we duidelijk kunnen onderscheiden? Welke as(sen) is(zijn) dit?
- Is dit lichaam begrensd in de richting van de z-as? (Merk op dat er in het linkerlid een som van twee kwadraten staat).

- Indien het antwoord op de vorige vraag negatief is, waarom niet?

- Indien het antwoord op de vraag positief is, wat zijn dan vergelijkingen van de vlakken, evenwijdig met het xy-vlak die het oppervlak begrenzen?

- Is dit lichaam begrensd in de andere richtingen? Waarom?

- Zoek de poster van dit oppervlak en noteer de naam:

Opdracht 15

Beschouw een oppervlak met als vergelijking:

$$x^2 = x^4 + y^2 z^2$$

Beantwoord aan de hand van deze vergelijking de volgende vragen over dit oppervlak:

- Welke coördinaatvlakken zijn symmetrievlakken van dit oppervlak?

- Welke assen zullen we duidelijk kunnen onderscheiden?

- Is dit lichaam begrensd in de richting van de x-as? Waarom of waarom niet?

- We zoeken de gemeenschappelijke punten van dit oppervlak en het vlak met vergelijking $z = 1$. Welke figuur vormt dit?

- Is dit lichaam begrensd in de andere richtingen?

- Zoek de poster van dit oppervlak - let wel: de vergelijking op de poster heeft andere coëfficiënten om de vorm beter te benadrukken - en noteer de naam:

7 Verkubussen van een bol

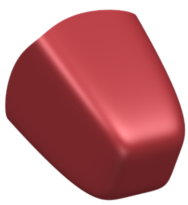
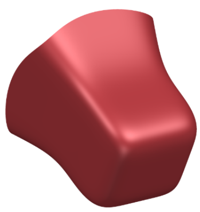
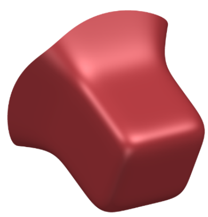
We hebben ontdekt dat de eenheidsbol 'omsloten' kan worden door een kubus met ribbe 2, waarvan de zijvlakken evenwijdig zijn met de coördinaatvlakken. Als we het programma SURFER opnieuw openen, zien we onder Start>Tutorial een oppervlak dat 'Kubus' wordt genoemd. Dit is echter geen echte kubus, maar een tussenvorm tussen eenheidsbol en omsluitende kubus.

Opdracht 16

- Vergelijk de vergelijking van de eenheidsbol en van deze tussenvorm. Probeer de vergelijking verder om te vormen dat het oppervlak zo dicht mogelijk die van de kubus nadert. (Je botst op de beperkingen van de rekenkracht van het programma). Schrijf de bekomen vergelijking hieronder op.

- Soms klapt bij het wijzigen van de exponenten de tussenvorm langs 1, 2 of 3 zijvlakken open. Daardoor wordt het oppervlak in één richting onbegrensd. Hoe zie je dat aan de vergelijking?

- Je ziet een aantal van deze eenzijdig opengeklapte tussenvormen hieronder. Start met de vergelijking van 'Kubus', wijzig deze lichtjes en schrijf onder elke tekening het voorschrift.

- Zoek een vergelijking van onderstaand oppervlak: 'Poef'. Wijzig de vergelijking van 'Kubus' en schrijf je vergelijking onder de tekening.