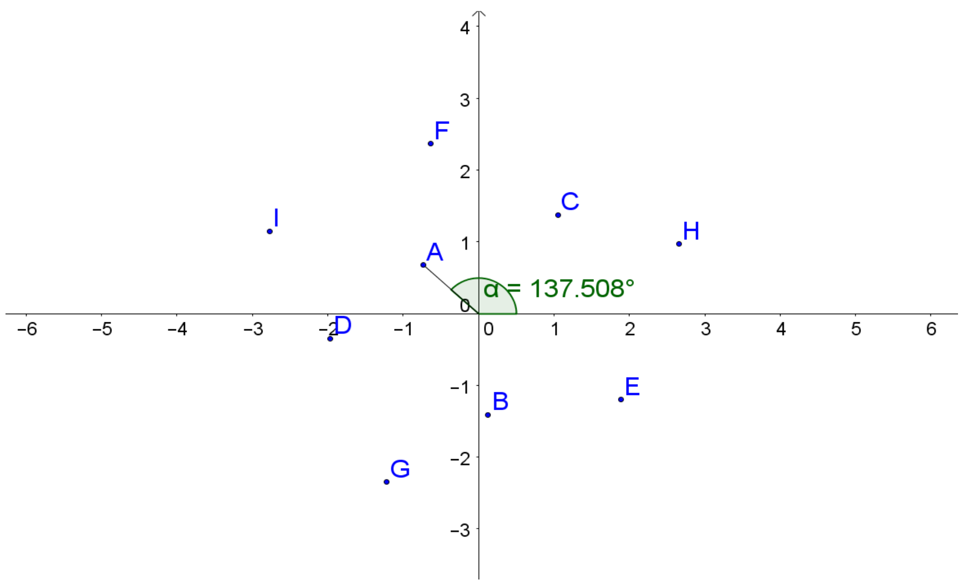
De Wonderlijke Zonnebloem

Brecht Verstappen
Student SLO wiskunde KU Leuven

Wiskunde en de natuur. Op het eerste zicht zijn dat twee aparte werelden, maar schijn bedriegt: de natuur zit vol met wiskundige principes en fenomenen. Zo hebben bloemen vaak 3, 5, 8, 13, 21, 34 of 55 bloemblaadjes, vertonen dennenappels speciale spiralen en zit ook in zonnebloemen een hoop wiskunde verborgen.
Met behulp van de Cinderella-applet “Sunflower” zullen we in deze tekst verschillende wonderbaarlijke wiskundige fenomenen bekijken die de zonnebloem in petto heeft.

Hoe worden de zaden van een zonnebloem gevormd?

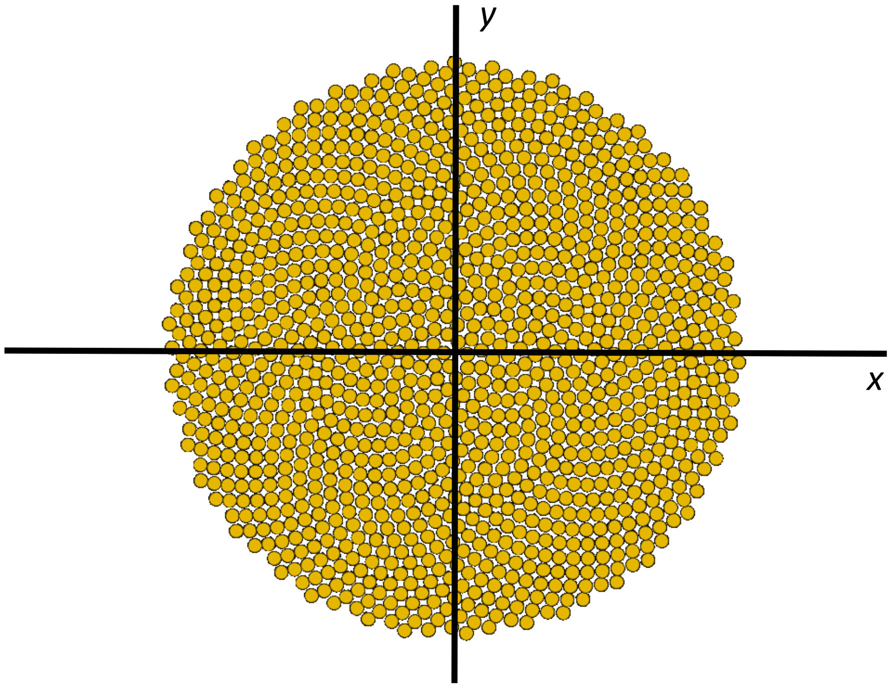
De zaden van een zonnebloem worden op een heel wiskundige manier gevormd. Als je de zaden nummert vanaf het centrum tot aan de rand, dan ligt het n^e zaadje op een hoek van $n \cdot 137{,}507 \ldots°$ met de straal gelijk aan $\sqrt{n}$. Met andere woorden: het volgende zaadje wordt steeds $137{,}507 \ldots°$ gedraaid ten opzichte van het vorige zaadje en iets verder van het centrum geplaatst. Dit is geïllustreerd in figuur 1. Op deze figuur worden de plaatsen van de eerste 7 zaadjes getoond. Zo ligt zaadje 1 (A) op een hoek van $137{,}507 \ldots°$ en zaadje 9 (I) op een hoek van $9 \cdot 137{,}507 \ldots°$ met de straal gelijk aan $\sqrt{9} = 3$.



Figuur 1: Locaties van de eerste 9 zaadjes

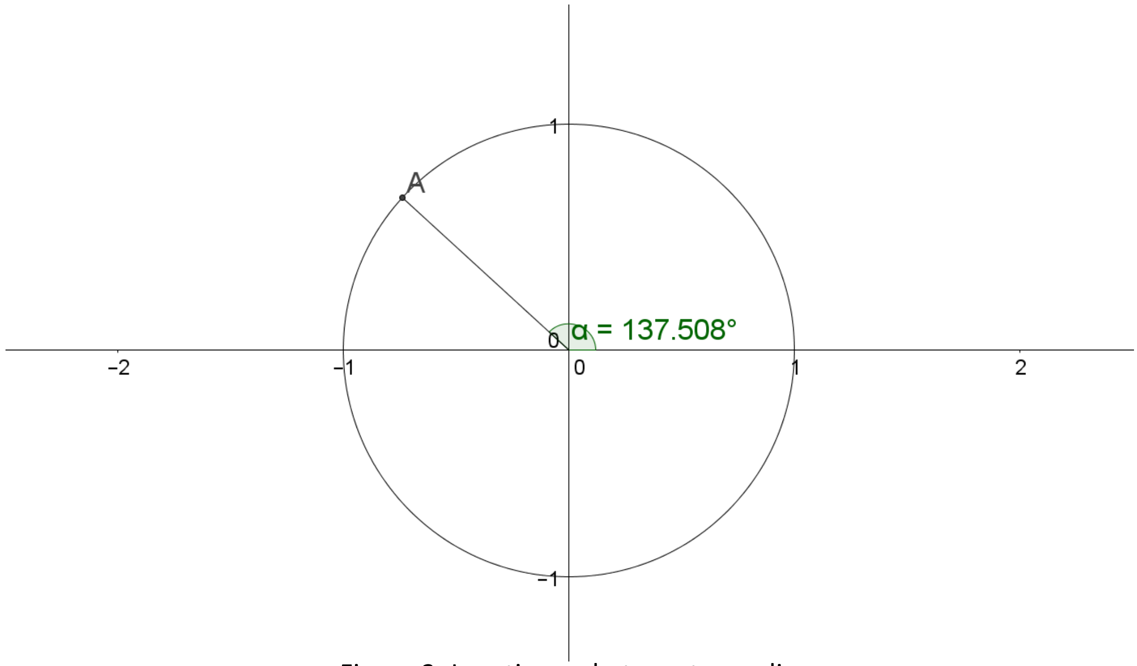
De hoek waarover opeenvolgende zaadjes worden gedraaid wordt **de divergentiehoek** genoemd. In ons geval is de divergentiehoek dus gelijk aan $137{,}507\ldots°$. Deze hoek wordt ook wel eens **de gulden hoek** genoemd, vanwege zijn verband met de gulden snede. Verderop in de tekst zullen we daar even bij stilstaan, maar eerst gaan we wat dieper in op de vorming van de zaden van de zonnebloem.

We zullen de coördinaten van het n^e zaadje proberen te bepalen. Om dit te doen hebben we eerst een geschikt assenstelsel nodig. We beschouwen het middelpunt van de zonnebloem als de oorsprong en nemen het assenstelsel zoals op de figuur hieronder. De eenheid die we gebruiken is de afstand van het eerste zaadje tot het middelpunt van de zonnebloem.



Figuur 2: Assenstelsel voor de zonnebloem

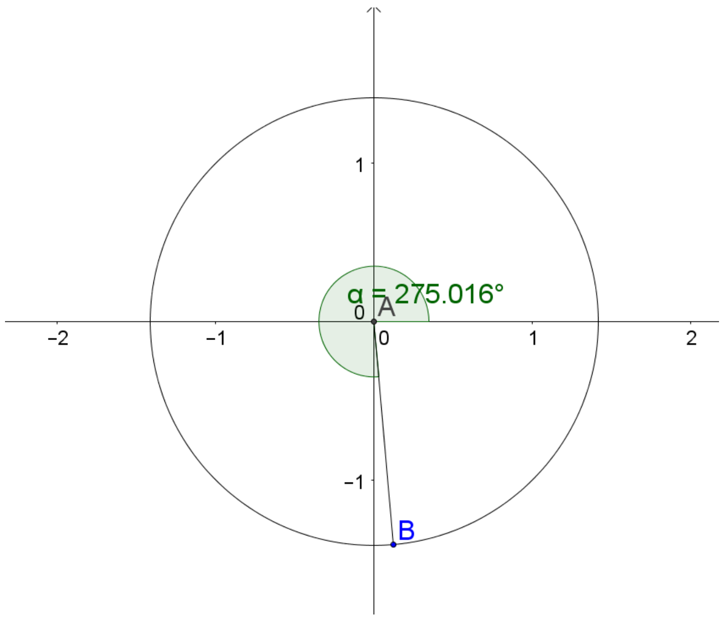
Hoe bepaal je nu de coördinaten van een zaadje als je enkel de straal en de hoek gegeven hebt?
Laten we beginnen met het eerste zaadje. Dat ligt op een afstand 1 van het midden van de zonnebloem en op een hoek van $137{,}507\ldots°$ ten opzichte van de positieve *x*-as. Dit zaadje is op figuur 3 weergegeven als het punt *A*. Merk op dat de cirkel die in figuur 3 getekend is de goniometrische cirkel is!



Figuur 3: Locatie van het eerste zaadje

1) Wat zijn de coördinaten van het punt *A* (de locatie van het eerste zaadje)?

Laten we nu een kijkje nemen naar het tweede zaadje. Dit zaadje ligt niet meer op een afstand 1 van het midden, maar op een afstand $\sqrt{2}$. Bijgevolg ligt dit zaadje niet meer op de goniometrische cirkel. Het zaadje ligt op een hoek van $2 \cdot 137{,}507\ldots° = 275{,}015\ldots°$ ten opzichte van de positieve *x*-as. Op figuur 4 is de locatie van dit zaadje aangeduid met het punt *B*.



Figuur 4: Locatie van het tweede zaadje

2) Bepaal de coördinaat van het tweede zaadje, of equivalent: bepaal de coördinaat van het punt *B*.

Vervolgens kijken we naar het derde zaadje. Dit zaadje ligt op een afstand $\sqrt{3}$ van het midden van de zonnebloem en op een hoek van $3 \cdot 137{,}507\ldots° = 412{,}523\ldots°$ ten opzichte van de positieve *x*-as.

3) Op welke hoek kleiner dan 360° zal het derde zaadje liggen ten opzichte van de positieve *x*-as?

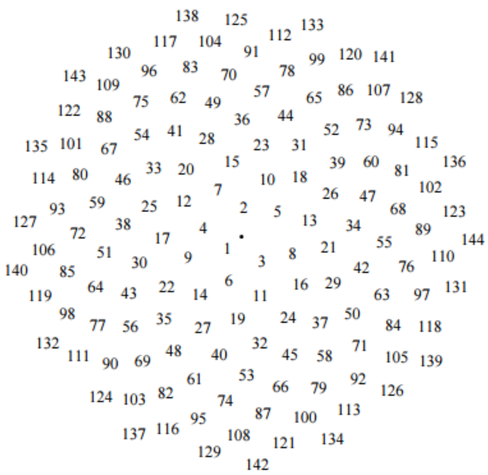
----

4) Bepaal de coördinaat van het derde zaadje, of equivalent: bepaal de coördinaat van het punt *C*.

We kunnen nu de coördinaten vinden van de zaadjes van de zonnebloem.

5) Wat zijn de coördinaten van het n^e zaadje van de zonnebloem, als je weet dat het n^e zaadje op een hoek ligt van $n \cdot 137{,}507\ldots°$ ten opzichte van de positieve *x*-as en op de cirkel met straal $\sqrt{n}$ ligt?

Op figuur 5 zie je de locaties van de eerste 144 punten van de zonnebloem. Merk op dat de locaties op de figuur niet helemaal overeenkomen met de locaties in de applet. Dit komt omdat men in deze figuur de divergentiehoek $137{,}507\ldots°$ in wijzerzin laat draaien in plaats van tegenwijzerzin. We krijgen dan het spiegelbeeld over de *x*-as van de zonnebloem in de applet.



Figuur 5: Eerste 144 zaadjes van de zonnebloem

(Bron: [http://ms.unimelb.edu.au/~segerman/papers/sunflower_spiral_fibonacci_metric.pdf)](http://ms.unimelb.edu.au/~segerman/papers/sunflower_spiral_fibonacci_metric.pdf)

Intermezzo: De Rij van Fibonacci

De rij van Fibonacci is zonder twijfel één van de meest fascinerende rijen uit de wiskunde. Hij is vernoemd naar de wiskundige Leonardo 'Fibonacci' Van Pisa, die deze rij voor het eerst vermeldde in zijn boek *liber abaci*.

De rij begint met de getallen 0 en 1 en vervolgens is elk getal van de rij steeds de som van de voorgaande twee getallen. De eerste getallen van de rij zijn dus de volgende getallen:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Snelle Vraag: Wat zijn de volgende 2 getallen uit de rij van Fibonacci?

Fibonaccigetallen komen heel vaak voor in de natuur. Allereerst hebben ze een belangrijke link met de gulden snede, wat we verderop in deze tekst behandelen. Ook komen ze terug in de ordening van bladeren aan takken, de bloemen van een artisjok, de ordening van de schubben van een dennenappel, … .Maar ze hebben ook een belangrijke rol bij onze zonnebloem. Dit gaan we nu nader onderzoeken.

De Spiralen van de Zonnebloem

Wanneer je de gulden hoek $137{,}507\ldots°$ lichtjes verandert, krijgt de zonnebloem totaal andere vormen. Laten we dit testen met behulp van de Cinderella-applet 'Sunflower'.

1) Start de Cinderella-applet "Sunflower" in de categorie "Maths and Plant Growth". Verander de hoek van de gulden hoek naar de hoek 137,142° en zet het aantal zaadjes op 200 of meer. De zonnebloem bestaat dan uit verschillende 'spaken'. Hoeveel?

----

2) Zet de hoek nu op 137,645° en neem het aantal zaadjes groot genoeg (minstens 300). Hoeveel spaken tel je? En wat bij 138,461°?

Het aantal spaken blijkt steeds een getal uit de rij van Fibonacci te zijn!
Maar dat is nog niet alles. Waarschijnlijk heb je al opgemerkt dat je in de zonnebloem veel verschillende spiralen kan tellen, afhankelijk van welke hoek je neemt. We gaan die nu proberen te tellen voor de gulden hoek $137{,}507\ldots°$.

3) Klik op de knop 'set to golden angle'. Deze instelling zet de hoek op $137{,}508°$ (de gulden hoek afgerond). Zet het aantal zaden op 50. Hoeveel spiralen tel je die wijzerzin lopen? Je telt die het gemakkelijkst door naar de uiteinden te kijken.

De zonnebloem heeft echter ook nog spiralen die in tegenwijzerzin lopen. Om die te zien, zullen we de 'Mark the Seeds' teller gebruiken. Wanneer de teller op een getal n staat, zorgt deze knop ervoor dat elk n^{e} zaadje wordt gekleurd. Als je de teller bijvoorbeeld op 3 zet, dan wordt elk 3$^{\text{e}}$ zaadje gekleurd, dus het 3$^{\text{e}}$, 6$^{\text{e}}$, 9$^{\text{e}}$, 12$^{\text{e}}$, … zaadje.
Drukken we daarnaast ook nog op 'Color Spirals', dan worden de zaadjes afwisselend gekleurd in het aantal aangegeven kleuren. Als de teller op 3 staat, wordt dus het 3$^{\text{e}}$, 9$^{\text{e}}$, 12$^{\text{e}}$, … zaadje in dezelfde kleur gekleurd en analoog het 2$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$, 8$^{\text{e}}$, … zaadje en het 1$^{\text{ste}}$, 4$^{\text{e}}$, 7$^{\text{e}}$, … zaadje.

4) Druk opnieuw op de knop 'set to golden angle' en zet het aantal zaden op 50. Zet de 'Mark The Seeds' teller op 8 en druk op 'Color Spirals'. Hoeveel spiralen tel je tegenwijzerzin? Welk verband stel je vast tussen dit resultaat en het resultaat van vraag 3)?

----

5) Zet het aantal zaden op 103. Tel het aantal spiralen door de ‘Mark the seeds’ teller op enerzijds 13 en anderzijds 21 te zetten. Hoeveel spiralen tel je nu die in wijzerzin lopen? En hoeveel lopen er tegenwijzerzin? Krijg je dezelfde conclusie als in 4)?

----

6) Zet het aantal zaden op 200. Hoeveel spiralen verwacht je wijzerzin en tegenwijzerzin te tellen? Tel dan de spiralen na door de ‘Mark The Seeds’ teller op het juiste aantal te zetten en kijk of je voorspelling juist was.

Opnieuw komen we tot een verassende vaststelling: als we de spiralen op een consistente manier tellen, komt het aantal steeds overeen met een getal uit de rij van Fibonacci! Sterker nog, de spiralen die in wijzerzin lopen en die in tegenwijzerzin lopen zijn juist twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci! Hoe meer zaden we nemen, hoe groter we de Fibonaccigetallen krijgen. Hoe minder zaden, hoe kleiner de Fibonaccigetallen.

7) Probeer nu nog meer spiralen te tellen door de ‘Mark the seeds’ teller te gebruiken. Vanaf welk aantal kan je de spiralen duidelijk zien met de applet?

----

8) Zie je de spiralen die je bij een klein/groot aantal zaden ziet ook wanneer je het aantal zaden vermeerdert/vermindert? En wat als je de ‘Mark The Seeds’ teller op een niet-Fibonaccigetal zet?

Opmerking 1: Hoewel je bijvoorbeeld de 13 spiralen ook wel kunt zien bij een groot aantal zaden als je ‘Color Spirals’ gebruikt, neem je best een redelijk klein aantal zaden om 8 of 13 spiralen te zien, zodat je ze ook zonder kleuren kan zien. Analoog neem je best een groot aantal zaden om 55 of 89 spiralen duidelijk te zien. Waarom dit zo is verklaren we in een opmerking op het einde van deze tekst.

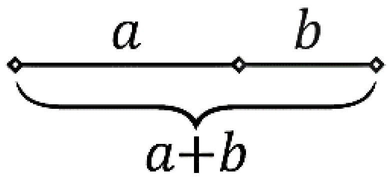
Opmerking 2: Wanneer je de ‘Mark the Seeds’ teller op sommige niet-Fibonaccigetallen zet kan je de indruk krijgen dat je opnieuw andere spiralen kan tellen. Deze spiralen komen echter overeen met de spiralen van een Fibonaccigetal. Neem bijvoorbeeld 17. We tellen dan 17 x 2 = 34 spiralen, wat opnieuw een Fibonaccigetal is.

Hoe komt het nu dat het aantal spiralen net een Fibonaccigetal is? Hoe komt het dat bij sommige hoeken een aantal spaken voorkomen en waarom neemt de zonnebloem nu als hoek precies $137{,}507\ldots°$ om zijn zaden te vormen?
Om dit allemaal te verklaren, gaan we het even hebben over een speciale verhouding: de Gulden Snede!

Intermezzo: De Gulden Snede

De **Gulden Snede** is een verdeling van een lijnstuk in twee delen waarvan de lengtes een heel speciale verhouding hebben. Het is een verhouding die heel vaak voorkomt in de natuur en volgens esthetici een intrinsieke schoonheid bevat.
Bij de gulden snede verhoudt het grootste van de twee delen van het lijnstuk zich tot het kleinste deel, zoals het gehele lijnstuk zich verhoudt tot het grootste deel. Als *a* de lengte voorstelt van het grootste deel van het lijnstuk en *b* de lengte van het kleinste deel van het lijnstuk, dan is de lengte van het hele lijnstuk logischerwijze $a + b$. Een lijnstuk is nu verdeeld volgens de gulden snede als en slechts als:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$



Figuur 6: Lijnstuk verdeeld volgens de gulden snede (bron: Wikipedia)

De verhouding $\frac{a}{b}$ wordt het **gulden getal** genoemd. Dit wordt meestal aangeduid met de Griekse letter ϕ ('phi').

1) Het gulden getal ϕ heeft een mooi verband met zijn inverse $\frac{1}{\phi}$. Schrijf $\frac{1}{\phi}$ in termen van ϕ. Doe dit door gebruik te maken van de definitie van de gulden snede.

----

2) Met behulp van de uitdrukking die je in 1) hebt gevonden, kan je dan een numerieke waarde voor ϕ afleiden? Opmerking: je krijgt 2 oplossingen, maar we zoeken de positieve.

We merken op dat ϕ een irrationaal getal is, aangezien $\sqrt{5}$ een irrationaal getal is. Dit betekent dat ϕ niet geschreven kan worden als een breuk (waarvan de teller en de noemer een geheel getal zijn)! De decimale uitdrukking van ϕ is $1{,}6180339887\ldots$. Het irrationale karakter van ϕ zal de reden blijken te zijn waarom deze verhouding voorkomt in de natuur.

Als we de phi in het rechterlid van de gelijkheid $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ vervangen door $1 + \frac{1}{\phi}$, krijgen we

$$\phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}}.$$

Als we dit steeds opnieuw doen, krijgen we uiteindelijk de volgende kettingbreuk:

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

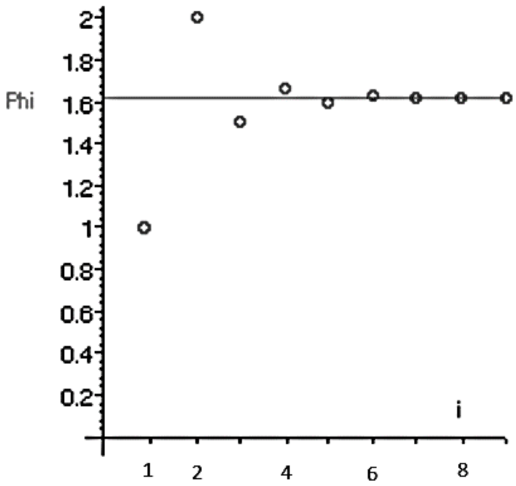
Door 'deze kettingbreuk 'af' te 'kappen' (door dus maar een eindig aantal stappen te zetten in het vervangproces van hierboven), krijgen we breuken die een goede benadering zijn van het irrationale getal ϕ. Zo zien de eerste 6 benaderingen er als volgt uit:

$$1, \quad 1+1, \quad 1+\frac{1}{1+1}, \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}, \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}, \quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}$$

3) Vereenvoudig de bovenstaande benaderingen. Wat stel je vast?

Men kan aantonen dat dit de optimale rationale benaderingen zijn van ϕ. Hiermee wordt bedoeld dat er voor elk van die benaderingen geen enkel rationaal getal bestaat met een kleinere noemer dat de exacte waarde $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ beter benadert.

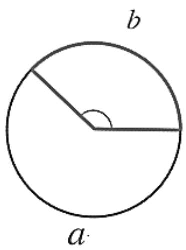
Hoe langer we wachten om de kettingbreuk af te kappen, hoe beter de benadering zal zijn. De benadering zal om de beurt groter en kleiner zijn dan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dit zie je ook op de onderstaande figuur. De bolletjes duiden de benaderingen aan. De *x*-as geeft het volgnummer van de benadering weer.



Figuur 7: Benaderingen van ϕ

(Bron: http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html)

Allemaal heel mooi, maar we hebben nog steeds niet uitgelegd wat 137,507 … ° te maken heeft met de Gulden Snede en waarom die hoek de Gulden Hoek wordt genoemd. Net zoals bij een lijnstuk kunnen we ook de cirkel verdelen in twee delen zo dat de delen zich verhouden volgens de Gulden Snede. Dit is weergegeven op Figuur 8.



Figuur 8: Cirkel verdeeld volgens de Gulden Snede. (Bron: Wikipedia)

De **Gulden Hoek** is de hoek op de boog *b* met de bogen *a* en *b* zodanig dat de verhouding $\frac{a}{b}$ gelijk is aan het gulden getal ϕ. Equivalent: noem α de hoek op de boog *a* en β de hoek op de boog *b*, dan is β de Gulden Hoek als en slechts als $\frac{\alpha}{\beta} = \phi$.

4) Toon aan dat de Gulden Hoek gelijk is aan het tegengestelde van $\frac{1}{\phi}360° \approx 222{,}4922359°$. Gebruik dat $\alpha + \beta = 360°$.

Met andere woorden: de Gulden Hoek wordt gegeven door $360° - 222{,}4922359\ldots° = 137{,}5077641\ldots°$, wat afgerond de hoek $137{,}508°$ uit de applet is!

De Spiralen Verklaard

Na dit intermezzo, wordt het weer tijd om terug te gaan naar onze zonnebloem. We hebben al gezien dat het aantal spiralen een Fibonaccigetal is en dat bij sommige keuzes van hoeken een aantal spaken tevoorschijn komen. In deze sectie gaan we deze fenomenen verklaren.

1) Stel dat je zelf een zonnebloem vormt op exact dezelfde manier, maar waarbij de hoek waarop de zaadjes liggen gelijk is aan $\frac{1}{5}360°$. Welke vorm denk je dat de zonnebloem gaat hebben?

----

2) Wat verwacht je bij een zonnebloem die als gekozen hoek een hoek van $\frac{p}{q}360°$ heeft, met *p* en *q* natuurlijke getallen en onderling ondeelbaar?

Laten we nu kijken naar de rationale benaderingen van ϕ, die we in het intermezzo over de Gulden Snede hebben geïntroduceerd. In de tabel hieronder zijn de decimale waarden van deze benaderingen weergegeven, alsook de decimale waarden van de hoeken verkregen door de benaderingen te vermenigvuldigen met 360° en het tegengestelde van die hoeken. We zullen deze tabel in het vervolg gebruiken om het aantal spaken en spiralen dat we te zien kregen in de sectie 'De Spiralen van de Zonnebloem' te verklaren.

Benaderingen voor ϕ	Benaderingen voor $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$	Benaderingen voor $\frac{1}{\phi}360°$	Benaderingen voor $360° - \frac{1}{\phi}360°$
$3/2 = 1{,}5$	$2/3 = 0{,}66 \ldots$	$2/3 \cdot 360° = 240°$	$360° - 240° = 120°$
$5/3 = 1{,}66 \ldots$	$3/5 = 0{,}6$	$3/5 \cdot 360° = 216°$	$360° - 216° = 144°$
$8/5 = 1{,}6$	$5/8 = 0{,}625$	$5/8 \cdot 360° = 225°$	$360° - 225° = 135°$
$13/8 = 1{,}625$	$8/13 = 0{,}6153 \ldots$	$8/13 \cdot 360°$ $= 221{,}538461 \ldots °$	$360° - 221{,}538 \ldots °$ $= \mathbf{138{,}461538} \ldots °$
$21/13 = 1{,}6153 \ldots$	$13/21 = 0{,}6190 \ldots$	$13/21 \cdot 360°$ $= 222{,}857142 \ldots °$	$360° - 222{,}857 \ldots °$ $= \mathbf{137{,}142857} \ldots °$
$34/21 = 1{,}6190 \ldots$	$21/34 = 0{,}6176 \ldots$	$21/34 \cdot 360°$ $= 222{,}352941 \ldots °$	$360° - 222{,}352 \ldots °$ $= \mathbf{137{,}647058} \ldots °$
$55/34 = 1{,}6176 \ldots$	$34/55 = 0{,}6181 \ldots$	$34/55 \cdot 360°$ $= 222{,}5454 \ldots °$	$360° - 222{,}5454 \ldots °$ $= \mathbf{137{,}4545} \ldots °$

Opmerking: In het vet zijn de hoeken aangeduid die we ook effectief kunnen testen met de applet.

3) Bij vragen 1 en 3 in de sectie "De Spiralen van de Zonnebloem" testten we de hoeken 137,142°, 137,645° en 138,461°. Kan je met de gegevens uit de tabel een verklaring bekomen voor de resultaten die je toen had gevonden?

We kunnen dus besluiten dat de hoeken waarbij we spaken zagen, hoeken zijn die overeenkomen met een rationaal veelvoud van 360°!

Na deze rationale veelvouden van 360°, keren we nu terug naar de Gulden Hoek $137{,}5077641\ldots°\ \approx 137{,}508°$. In de zonnebloem die deze hoek gebruikt konden we verschillende spiralen ontdekken. We hadden opgemerkt dat het aantal spiralen steeds een Fibonaccigetal is en sterker nog, dat het aantal spiralen in wijzerzin en spiralen in tegenwijzerzin twee opeenvolgende Fibonaccigetallen zijn. Laten we dit nu verklaren.

4) Stel de hoek nu weer in op 137,142° (de beste benadering die de applet kan geven voor $8/21 \cdot 360°$). Verschuif de hoek nu stilletjes naar kleinere waarden (bv. tot 137,091°). Wat merk je op? Begin dan opnieuw, maar verschuif nu naar grotere waarden (bv. tot 137,201°).

----

5) We proberen dit nu te veralgemenen. Welk fenomeen verwacht je wanneer je de hoek $\frac{p}{q}360°$ een klein beetje vermindert (*p* en *q* zijn onderling ondeelbare natuurlijke getallen)? En wat als je die hoek een klein beetje vermeerdert?

Nu we dit verklaard hebben, kunnen we aantonen waarom we steeds opeenvolgende Fibonacci getallen tegenkomen bij het tellen van spiralen in enerzijds wijzerzin en anderzijds tegenwijzerzin.

6) Zet de hoek op de afgeronde gulden hoek 137,508° en kleur de spiralen met de “Mark the Seeds” teller op 21. Neem 200 zaden. Verschuif dan de hoek traag naar 137,142°. Wat zie je gebeuren? Kan je dit verklaren aan de hand van de vorige vraag en de tabel?

----

7) Zet opnieuw de hoek op 137,508° en kleur de spiralen met de “Mark The Seeds” teller op 34. Neem als aantal zaden 1000. Verschuif de hoek traag naar 137,647°. Wat zie je gebeuren? Kan je dit verklaren?

----

8) Zet opnieuw de hoek op 137,508 en kleur de spiralen met de "Mark The Seeds" teller op 13. Neem als aantal zaden 225. Verschuif de hoek traag naar 138,461°. Wat zie je gebeuren? Kan je dit analoog verklaren?

----

9) Bekijk nu opnieuw de tabel en in het bijzonder de hoeken die in het vet zijn gekleurd. We merken op dat die hoeken om de beurt groter en kleiner zijn dan 137,508°. Kan je aan de hand van de vorige vragen nu verklaren waarom we steeds twee opeenvolgende Fibonaccigetallen tegenkomen bij het tellen van de spiralen?

Opmerking 1: Wanneer je het met kleinere Fibonaccigetallen probeert dan 13, krijg je gelijkaardige fenomenen, alleen kan je met de applet de hoek niet zodanig veel veranderen. Als je bijvoorbeeld de 8 spiralen wilt zien, kan je de hoek helemaal naar links verschuiven en zie je de 8 spaken een beetje tevoorschijn komen.

Opmerking 2: Het is niet zo dat alleen de spiralen die overeenkomen met *opeenvolgende* Fibonaccigetallen aanwezig zijn in de zonnebloem. Bij een bepaalde grootte van het aantal zaden kan je steeds een beperkt aantal spiralen goed zien, terwijl de andere spiralen ook aanwezig zijn, maar veel moeilijker te ontdekken zijn (zonder gebruik te maken van de 'Mark the Seeds' teller).
Zo kan je bij 800 zaden gemakkelijk 34 spiralen wijzerzin en 55 spiralen tegenwijzerzin zien, maar ook de 21 spiralen zijn aanwezig, weliswaar veel moeilijker te zien zonder te kleuren.
Als je 1250 zaadjes neemt, kan je gemakkelijk 55 spiralen en in zekere mate 89 en 34 spiralen goed waarnemen, maar voor Fibonaccigetallen kleiner dan 34 wordt het veel moeilijker om ze te zien: je ziet ze vaak vanuit het centrum starten, maar het wordt na een tijd moeilijk om ze te volgen omdat de zaadjes aan de randen te ver van elkaar gelegen zijn.
De reden hiervoor is dat bijvoorbeeld het tegengestelde van $\frac{34}{55}360°$, $\frac{55}{89}360°$ en $\frac{21}{34}360°$ allemaal dichter bij 137,508° liggen, dan het tegengestelde van bijvoorbeeld $\frac{13}{21}360°$ en $\frac{8}{13}360°$ en bijgevolg de oorspronkelijke 55, 89 en 34 spaken minder gebogen zijn dan de 21 en 13 spaken. Omdat die spaken

minder gebogen zijn, kan je dus de 55, 89 en 34 spiralen beter met het blote oog kan waarnemen. We kunnen analoge besluiten trekken bij andere Fibonaccigetallen.

10) Zet de hoek op de afgeronde Gulden Hoek (137,508°) en het aantal zaden op 1250. Probeer nu zoveel mogelijk spiralen te zien in deze zonnebloem door de 'Mark the Seeds' teller te gebruiken! Je kan de 'Mark The Seeds' teller maar maximaal op 100 zetten. Kan je een manier vinden om toch 144 spiralen te tellen?

Waarom juist ϕ?

De vraag die ons resteert, luidt als volgt: waarom neemt de zonnebloem juist $\frac{1}{\phi}360°$ als hoek? Waarom niet bijvoorbeeld $\frac{1}{\pi}360°$?

Dit heeft alles te maken met het feit dat de zaden steeds op een manier worden geplaatst zodat ze de beschikbare ruimte zo efficiënt mogelijk vullen en zodat de plant zo sterk mogelijk wordt. Immers, een plant met zaadjes geordend als radiale spaken zal helemaal niet sterk zijn. Het is duidelijk dat we daarom nooit een rationaal veelvoud van 360° moeten nemen, i.e. een hoek van de vorm $\frac{p}{q}360°$, *p* en *q* onderling ondeelbaar. We hebben immers gezien dat we dan altijd *q* spaken krijgen, wat de beschikbare ruimte niet zo goed benut.

Om een goede hoek te vinden, moeten we dus zoeken naar irrationaal veelvoud van 360°. Maar welk irrationaal veelvoud? Zijn er irrationale getallen die 'meer irrationaal' zijn als andere?

Het antwoord daarop is ja! Men noemt een irrationaal getal meer irrationaal dan een ander irrationaal getal als het moeilijker te benaderen is door breuken.

Maar welke rationale benaderingen worden als 'goed' beschouwd? Het is duidelijk dat je elk irrationaal getal heel goed kan benaderen door een breuk met de noemer gelijk aan een macht van 10. Zo is 1414213562/1000000000 een heel goede benadering van $\sqrt{2}$, maar zo'n benadering zullen we niet 'goed' noemen.

We noemen een rationale afschatting van een reëel getal een optimale rationale afschatting als er geen betere rationale afschatting van dat getal bestaat met een kleinere noemer. Zo is $\frac{22}{7}$ een optimale rationale benadering van π, aangezien er geen betere rationale benadering bestaat met een kleinere noemer. Irrationale getallen waarvan de optimale rationale benaderingen heel nauwkeurig zijn, worden dan als minder irrationaal beschouwd dan reële getallen die onnauwkeurige beste rationale benaderingen hebben.

Nu heeft de wiskundige Adolf Hurwitz in een belangrijke stelling bewezen dat elk getal oneindig veel rationale benaderingen $\frac{p}{q}$ heeft waarbij het verschil tussen de echte waarde en de benadering strikt kleiner is dan $\frac{1}{q^2\sqrt{5}}$. Nu blijkt dat bij de optimale rationale benaderingen van ϕ, het verschil altijd rond $\frac{1}{q^2\sqrt{5}}$ blijft hangen en dus nooit veel kleiner wordt. Sterker nog: men heeft kunnen aantonen dat elk ander irrationaal getal beter benaderd kan worden dan ϕ. Daarom wordt ϕ als meest irrationale getal beschouwd, i.e. het irrationale getal dat het slechtst door breuken benaderd kan worden.

Wanneer we dus dat veelvoud van 360° nemen, krijgen we de hoek zodat de zaden op de meest efficiënte manier worden geplaatst. En net daarom komt ϕ voor in onze zonnebloem.

Referenties

- G. Verbeeck, *Phyllotaxis, Fibonacci en de gulden snede*, Uitwiskeling, jaargang 21 nummer 2, 2005
- H.Segerman, *The Sunflower Spiral and the Fibonacci Metric,* Online, http://ms.unimelb.edu.au/~segerman/papers/sunflower_spiral_fibonacci_metric.pdf, 2010
- R. Knott, *Fibonacci Numbers and Nature,* Online, http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat2.html, 2010
- T. Philips, *The Most Irrational Number*, Online, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-irrational2
- S.n., *Wiskunde en de zonnebloemen*, Online, https://www.vwo.be/vwo/vorige-edities/de-posters/2000-2001-wiskunde-en-zonnebloemen, VWO, 2001